

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР:
Владимир Анатольевич Захаров

`zakh@cs.msu.su`

<http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html>

Лекция 2.

Классическая логика предикатов
первого порядка

Синтаксис. Термы и формулы.

Семантика. Интерпретация.

Выполнимость формул.

ПРЕДИКАТ

латинский термин («предвидеть, предсказывать»), обозначающий член предложения — сказуемое.

Студент слушает лектора

Субъект Предикат Объект

В более общем смысле предикат — это свойство, атрибут предмета, отношение между предметами, событиями, явлениями.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные переменные $Var = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\};$

Предметные константы $Const = \{c_1, c_2, \dots, c_l, \dots\};$

Функциональные символы $Func = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \dots, f_r^{(n_r)}, \dots\};$

Предикатные символы $Pred = \{P_1^{(m_1)}, P_2^{(m_2)}, \dots, P_s^{(m_s)}, \dots\}.$

Тройка $\langle Const, Pred, Func \rangle$ называется **сигнатурой** алфавита.

АЛФАВИТ

Базовые символы.

Предметные константы — это **имена** предметов;

Функциональные символы обозначают **операции** над предметами;

Предикатные символы обозначают **отношения** между предметами.

Пример.

Константы $0, 1, \pi, \dots;$

Функциональные символы $+, \times, \text{ mod }, \dots;$

Предикатные символы $=, <, \dots$

АЛФАВИТ

Логические связки и кванторы.

Конъюнкция	(логическое И)	$\&$
Дизъюнкция	(логическое ИЛИ)	$\vee$
Отрицание	(логическое НЕ)	$\neg$
Импликация	(логическое ЕСЛИ-ТО)	$\rightarrow$.

Квантор всеобщности	(«для каждого»)	$\forall$
Квантор существования	(«хотя бы один»)	$\exists$

Знаки препинания.

Разделитель	,
Скобки	()

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение термина.

Терм — это

x	, если $x \in Var$	x — переменная;
c	, если $c \in Const$	c — константа;
$f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$	, если $f^{(n)} \in Func$	составной терм.
$t_1, t_2, \dots, t_n$ — термы		

$Term$ — множество термов заданного алфавита.

Var_t — множество переменных, входящих в состав терма t .

$t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — запись обозначающая терм t , у которого
 $Var_t \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Если $Var_t = \emptyset$, то терм t называется **основным термом**.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры термов.

x_2

т. к. $x_2 \in Var$;

c_1

т. к. $c_1 \in Const$;

$f^{(2)}(x_2, c)$

т. к. $f^{(2)} \in Func$, $x_2, c \in Term$;

$\times(x, +(1, \exp(2, y)))$

т. к. $\times, +, \exp \in Func$,
 $1, 2 \in Const$, $x, y \in Var$;

$x \times (1 + 2^y)$

инфиксная форма записи термов;

$f(c_1, g(h(c_1), c_2))$

основной терм.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Определение формулы.

Формула — это

атомарная формула

$P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m)$, если $P^{(m)} \in Pred, \{t_1, t_2, \dots, t_m\} \subseteq Term$;

составная формула

$(\varphi \& \psi)$, если φ, ψ — формулы;

$(\varphi \vee \psi)$

$(\varphi \rightarrow \psi)$

$(\neg \varphi)$

$(\forall x \varphi)$, если $x \in Var, \varphi$ — формула.

$(\exists x \varphi)$

$Form$ — множество всех формул заданного алфавита.

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ «значения термов $t_1, t_2, \dots, t_m$ находятся в отношении $P^{(m)}$ »;

$(\varphi \& \psi)$ « φ и ψ »;

$(\varphi \vee \psi)$ « φ или ψ »;

$(\varphi \rightarrow \psi)$ «если φ , то ψ »;

$(\neg \varphi)$ «неверно, что φ »;

$(\forall x \varphi)$ «для любого значения x верно φ »;

$(\exists x \varphi)$ «существует такое значение x , для которого верно φ ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Примеры формул.

$$P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))$$

т. к. $P^{(2)} \in Pred$,
 $x_1, f(c, x_2) \in Term$;

$$R^{(1)}(x_1)$$

т. к. $R^{(1)} \in Pred$,
 $x_1 \in Term$;

$$(\neg R^{(1)}(x_1))$$

$$((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2)))$$

$$(\exists x_2((\forall x_1(\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

Область действия квантора $\exists$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

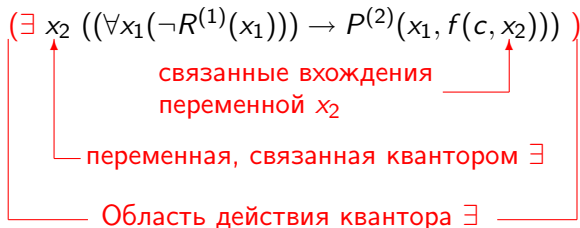
$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

— переменная, связанная квантором $\exists$

— Область действия квантора $\exists$ —

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

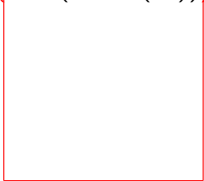
Свободные и связанные переменные.



СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$



Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

переменная, связанная квантором $\forall$

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

связанные вхождения
переменной x_1

переменная, связанная квантором $\forall$

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

↑
свободные вхождения
переменной x_1

Область действия квантора $\forall$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

$$(\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

свободные вхождения
переменной x_1

связанные вхождения
переменной x_1

связанные вхождения переменной x_2

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и **связанные** переменные.

Квантор связывает ту переменную, которая следует за ним.

Вхождение переменной в области действия квантора, связывающего эту переменную, называется **связанным**.

Вхождение переменной в формулу, не являющееся связанным, называется **свободным**.

Переменная называется **свободной**, если она имеет свободное вхождение в формулу.

Пример.

$$\varphi = (\exists x_2 ((\forall x_1 (\neg R^{(1)}(x_1))) \rightarrow P^{(2)}(x_1, f(c, x_2))))$$

Формула φ имеет единственную **свободную** переменную x_1 .

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Свободные и связанные переменные.

Var_φ — множество свободных переменных формулы φ .

$$\varphi = P^{(m)}(t_1, t_2, \dots, t_m) \quad Var_\varphi = \bigcup_{i=1}^m Var_{t_i};$$

$$\varphi = (\psi_1 \& \psi_2) \quad Var_\varphi = Var_{\psi_1} \cup Var_{\psi_2};$$

$$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$$

$$\varphi = (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$$

$$\varphi = (\neg \psi) \quad Var_\varphi = Var_\psi;$$

$$\varphi = (\forall x \psi) \quad Var_\varphi = Var_\psi \setminus \{x\}.$$

$$\varphi = (\exists x \psi)$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — запись, обозначающая формулу φ , у которой
 $Var_\varphi \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Если $Var_\varphi = \emptyset$, то формула φ называется
замкнутой формулой, или **предложением**.

$CForm$ — множество всех замкнутых формул.

Соглашение о приоритете логических операций

В порядке убывания приоритета связки и кванторы
располагаются так:

$\neg, \forall, \exists$

$\&$

$\vee$

$\rightarrow$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример правильного восстановления скобок

$$\forall x_1 \neg P(x_1) \ \& \ \exists x_2 R(x_1, x_2) \rightarrow \exists x_1 (\neg P(x_1) \vee P(x_2))$$

$$(\forall x_1 (\neg P(x_1))) \ \& \ (\exists x_2 R(x_1, x_2)) \rightarrow (\exists x_1 ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$((\forall x_1 (\neg P(x_1))) \ \& \ (\exists x_2 R(x_1, x_2))) \rightarrow (\exists x_1 ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2)))$$

$$(((\forall x_1 (\neg P(x_1))) \ \& \ (\exists x_2 R(x_1, x_2)))) \rightarrow (\exists x_1 ((\neg P(x_1)) \vee P(x_2))))$$

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Алфавит

Константы

0 — константа, действительное число ноль;

Функциональные символы

$h^{(2)}(x, y)$ — «абсолютная разность чисел x и y »;

Предикатные символы

$R^{(1)}(x)$ — « x — действительное число»;

$N^{(1)}(x)$ — « x — натуральное число»;

$S^{(1)}(x)$ — « x — последовательность действительных чисел»;

$E^{(3)}(x, y, z)$ — « x — это y -ый член последовательности z »;

$<^{(2)}(x, y)$ — «число x меньше числа y ».

СИНТАКСИС: ТЕРМЫ И ФОРМУЛЫ

Пример формулы, выражающей математическое определение

Формула $limit(x, y)$

$limit(x, y)$ — «число x — предел последовательности действительных чисел y ».

$limit(x, y)$:

$$\begin{aligned} R(x) \ \& \ S(y) \ \& \ \forall z(R(z) \ \& \ < (0, z) \rightarrow \\ & \exists u(N(u) \ \& \ \forall v(N(v) \ \& \ < (u, v) \rightarrow \\ & \exists w(E(w, v, y) \ \& \ < (h(w, x), z)))))) \end{aligned}$$

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Семантика — это свод правил, наделяющих значением (смыслом) синтаксические конструкции языка.

В языке логики предикатов значением термов являются функции, а значением формул — отношения (предикаты).

Значения термов и формул определяются на основе **алгебраических систем** .

Алгебраические системы, используемые в таком качестве, называются **интерпретациями** .

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Интерпретация сигнатуры $\langle Const, Func, Pred \rangle$ — это алгебраическая система $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, где

- ▶ D_I — непустое множество, которое называется **областью интерпретации**, **предметной областью**, или **универсумом**;
- ▶ $\overline{Const} : Const \rightarrow D_I$ — **оценка констант**, сопоставляющая каждой константе с элемент (предмет) $\bar{c}$ из области интерпретации;
- ▶ $\overline{Func} : Func^{(n)} \rightarrow (D_I^n \rightarrow D_I)$ — **оценка функциональных символов**, сопоставляющая каждому функциональному символу $f^{(n)}$ местности n всюду определенную n -местную функцию $\bar{f}^{(n)}$ на области интерпретации;
- ▶ $\overline{Pred} : Pred^{(m)} \rightarrow (D_I^m \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\})$ — **оценка предикатных символов**, сопоставляющая каждому предикатному символу $P^{(m)}$ местности m всюду определенное m -местное отношение $\bar{P}^{(m)}$ на области интерпретации.

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Пример

Сигнатура $Const = \{c_1, c_2\}$, $Func = \{f^{(1)}\}$, $Pred = \{P^{(1)}, R^{(2)}\}$.

Интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$:

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $c_1 = d_1$, $c_2 = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

СЕМАНТИКА: ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Значение терма

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, терм $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \dots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I .

Значение $t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ **терма** $t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно.

- ▶ Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, то
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = d_i;$$
- ▶ Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$, то
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{c};$$
- ▶ Если $t(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(t_1, \dots, t_k)$, то
$$t(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] = \bar{f}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_k[d_1, d_2, \dots, d_n]).$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

Значение формул в интерпретации определяется при помощи отношения выполнимости $\models$.

Пусть заданы интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$, формула $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и набор $d_1, d_2, \dots, d_n$ элементов (предметов) из области интерпретации D_I .

Отношение выполнимости $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ формулы φ в интерпретации I на наборе $d_1, d_2, \dots, d_n$ определяется рекурсивно.

- Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(t_1, \dots, t_m)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$\iff$

$$\bar{P}(t_1[d_1, d_2, \dots, d_n], \dots, t_m[d_1, d_2, \dots, d_n]) = \text{true};$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- ▶ Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \& \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$\iff$

$$\begin{cases} I \models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] \\ I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n] \end{cases}$$

- ▶ Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \vee \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$\iff$

$$I \models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- ▶ Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_1 \rightarrow \psi_2$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\iff$$

$$I \not\models \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

или

$$I \models \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

- ▶ Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \neg\psi$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

$$\iff$$

$$I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Отношение выполнимости формул

- ▶ Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \forall x_0 \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$



для **любого** элемента d_0 , $d_0 \in D_I$, имеет место

$$I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$$

- ▶ Если $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exists x_0 \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, то

$$I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$$



для **некоторого** элемента d_0 , $d_0 \in D_I$, имеет место

$$I \models \psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)[d_0, d_1, d_2, \dots, d_n]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Интерпретация

$$I = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Func}, \overline{Pred} \rangle$$

Область интерпретации $D_I = \{d_1, d_2, d_3\}$;

Оценка констант $\mathbf{c}_1 = d_1, \mathbf{c}_2 = d_3$;

Оценка функциональных и предикатных символов

$\mathbf{f}(x)$

x	$\mathbf{f}$
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$\mathbf{P}(x)$

x	$\mathbf{P}$
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$\mathbf{R}(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

Формула

$$\varphi = \forall x_1 (P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$

$I \not\models P(f(x_2))[d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x \ y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \Rightarrow I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x^y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \Rightarrow I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

$$I \models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \Rightarrow I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

$$I \models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$$

$$I \models \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models R(x_1, x_2)[d_1, d_1]$$

$$I \not\models P(f(x_2))[d_1] \Rightarrow I \models \neg P(f(x_2))[d_1]$$

$$I \models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_1, d_1]$$

$$I \models \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

$$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

$x \setminus y$	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$I \not\models P(x_1)[d_2]$

$I \models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2)))[d_2]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \quad y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

x	y	d_1	d_2	d_3
d_1		true	true	false
d_2		true	false	true
d_3		false	true	true

$I \models P(x_1)[d_3]$

$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1]$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x \ y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \ y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x \ y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \setminus y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x \ y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

$f(x)$

x	f
d_1	d_2
d_2	d_3
d_3	d_1

$P(x)$

x	P
d_1	true
d_2	false
d_3	true

$R(x, y)$

$x \ y$	d_1	d_2	d_3
d_1	true	true	false
d_2	true	false	true
d_3	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$$

$$I \not\models \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

f(x)

x	f
d ₁	d ₂
d ₂	d ₃
d ₃	d ₁

P(x)

x	P
d ₁	true
d ₂	false
d ₃	true

R(x, y)

x \ y	d ₁	d ₂	d ₃
d ₁	true	true	false
d ₂	true	false	true
d ₃	false	true	true

$$I \models P(x_1)[d_3]$$

$$I \not\models R(x_1, x_2)[d_3, d_1] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_1]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_2] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_2]$$

$$I \not\models \neg P(f(x_2))[d_3] \Rightarrow I \not\models R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2))[d_3, d_3]$$

$$I \not\models \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

$$I \not\models P(x_1) \rightarrow \exists x_2 (R(x_1, x_2) \ \& \ \neg P(f(x_2)))[d_3]$$

СЕМАНТИКА: ВЫПОЛНИМОСТЬ ФОРМУЛ

Итак, мы имеем

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))[d_1]$$

$$I \models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))[d_2]$$

$$I \not\models (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))[d_3]$$

Значит,

$$I \not\models \forall x_1 (P(x_1) \rightarrow \exists x_2(R(x_1, x_2) \& \neg P(f(x_2))))$$

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 2.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 3.

Выполнимые и общезначимые
формулы.

Модели. Логическое следование.

Проблема общезначимости.

Семантические таблицы.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой в интерпретации** I , если **существует** такой набор элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$, для которого имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **истинной в интерпретации** I , если **для любого** набора элементов $d_1, \dots, d_n \in D_I$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n]$.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **выполнимой**, если есть интерпретация I , в которой эта формула выполнима.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **общезначимой** (или **тождественно истинной**), если эта формула истинна в любой интерпретации.

Формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ называется **противоречивой** (или **невыполнимой**), если она не является выполнимой.

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры

$P(x_1) \& \neg P(x_2)$,
 $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$,
 $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ — выполнимые формулы.

$I_1 : D_I = \{d_1, d_2\}, \bar{P}(d_1) = \text{true}, \bar{P}(d_2) = \text{false}$

$I_1 \models P(x_1) \& \neg P(x_2)[d_1, d_2], \quad I_1 \models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x).$

$I_2 : D_I = \{d\}, \bar{P}(d) = \text{true}$

$I_2 \models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Формулы $P(x_1) \& \neg P(x_2)$, $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ необщезначимые.

$I_2 \not\models P(x_1) \& \neg P(x_2)[d, d], \quad I_1 \not\models \exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x).$

Формула $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ является общезначимой.

Но почему? И как в этом убедиться?

ВЫПОЛНИМЫЕ И ОБЩЕЗНАЧИМЫЕ ФОРМУЛЫ

Выполнимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний. Каждая выполняемая формула несет определенную информацию.

Общезначимые формулы — это трюизмы, банальности, тавтологии, не несущие никакой информации.

Какую же роль играют общезначимые формулы?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, $\Gamma \subseteq CForm$. Тогда каждая интерпретация I , в которой выполняются все формулы множества Γ , называется моделью для множества Γ .

Модель для множества формул Γ — это интерпретация (реальный или виртуальный мир), устройство которого адекватно всем предложениям из множества Γ .

Пример

$I : D_I = \{d_1, d_2\}, \bar{P}(d_1) = \text{true}, \bar{P}(d_2) = \text{false}$

I — модель для множества формул $\Gamma = \{\exists x P(x), \exists x \neg P(x)\}$.

Замечание

А какая интерпретация является моделью пустого множества формул $\Gamma = \emptyset$?

Правильный ответ: любая интерпретация . Почему ?

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Пример

$C(x)$ — « x — квадрат»;

$S(x)$ — « x — шар»;

$B(x)$ — « x — черный предмет»;

$W(x)$ — « x — белый предмет»;

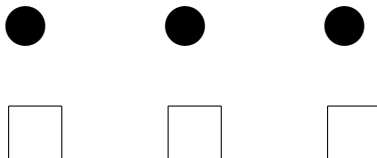
$U(x, y)$ — «предмет x лежит под предметом y ».

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Каждый белый куб лежит под каким-то черным шаром.

$$\forall x (W(x) \& C(x) \rightarrow \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x, y)))$$

Модель /



~~$$\forall x (W(x) \& C(x) \& \exists y (B(y) \& S(y) \& U(x, y)))$$~~

Каждый предмет является белым кубом
и лежит под каким-то черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

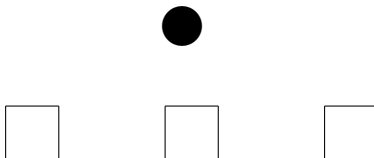
$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Модель /



МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Модель /



$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \rightarrow \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Модель /



$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \rightarrow \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \rightarrow U(x,y)))$$

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Какой-то белый куб лежит под всеми черными шарами.

$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \& \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \ \rightarrow \ U(x,y)))$$



Модель J

~~$$\exists x (W(x) \ \& \ C(x) \ \rightarrow \ \forall y (B(y) \ \& \ S(y) \ \rightarrow \ U(x,y)))$$~~

Какой-то предмет либо не является белым кубом,
либо лежит под каждым черным шаром.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Общий принцип правильного построения формул.

Каждый предмет, наделенный атрибутом A , обладает свойством B :

$$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$$

Некоторый предмет, наделенный атрибутом A , обладает свойством B :

$$\exists x (A(x) \& B(x))$$

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Определение

Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул, и φ — замкнутая формула. Формула φ называется **логическим следствием** множества предложений (базы знаний) Γ , если каждая модель для множества формул Γ является моделью для формулы φ , т. е.

$$\text{для любой интерпретации } I: \quad I \models \Gamma \implies I \models \varphi$$

Логические следствия — это «производные» знания, которые неизбежно сопутствуют «базовым» знаниям Γ , находятся в причинно-следственной зависимости от предложений Γ . Одна из главных задач (и одновременно наиболее характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это извлечение логических следствий из баз знаний.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Обозначения

Запись $\Gamma \models \varphi$ обозначает, что φ — логическое следствие Γ .

А какие формулы являются логическими следствиями пустой базы знаний $\Gamma = \emptyset$? Правильный ответ: общезначимые.

Поэтому для обозначения общезначимости формулы φ будем использовать запись $\models \varphi$.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. Тогда

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть I — произвольная интерпретация.

Если $I \not\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Если $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$, то $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$, т. е. I — модель для Γ .

Поскольку $\Gamma \models \varphi$, получаем $I \models \varphi$. Значит,
 $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Таким образом, для любой интерпретации I имеет место
 $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Значит, $\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$ — общезначимая формула.

МОДЕЛИ. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ

Теорема о логическом следствии

Пусть $\Gamma = \{\psi_1, \dots, \psi_n\} \subseteq CForm$, $\varphi \in CForm$. Тогда

$$\Gamma \models \varphi \iff \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi.$$

Доказательство. $\Leftarrow$ Пусть I — модель для множества предложений Γ , т. е. $I \models \psi_i$, $1 \leq i \leq n$.

Тогда $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n$.

Так как $\models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$, верно $I \models \psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$.

Значит, $I \models \varphi$.

Так как I — произвольная модель для Γ , приходим к заключению $\Gamma \models \varphi$.



ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Общезначимые формулы — это каналы причинно-следственной связи, по которым передаются знания, представленные в виде логических формул, преобразуясь при этом из одной формы в другую.

Практически важно уметь определять эти каналы и настраивать их на извлечение нужных знаний.

- ▶ База знаний — множество предложений Γ ;
- ▶ Запрос к базе знаний — предложение φ ;
- ▶ Получение ответа на запрос — проверка логического следствия $\Gamma \models \varphi$.

Если Γ — конечное множество, то проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости формулы

$$\psi_1 \& \dots \& \psi_n \rightarrow \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Таким образом, возникает проблема
общезначимости формул:

Для заданной формулы φ
проверить ее общезначимость:

$$\models \varphi?$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Утверждение.

Для любой формулы $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ верно, что

$$1. \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \iff \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n);$$

2.

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнимая} \\ \iff & \\ & \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнимая;} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ — выполнима в любой интерпретации} \\ \iff & \\ & \models \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Доказательство

Самостоятельно. Это просто.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Как же решать проблему
общезначимости

$\models \varphi$?

Может быть проверять все
интерпретации по очереди ?

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Нет, такой подход заведомо обречен на неудачу. Почему?
Потому, что верно

Утверждение.

Существует такая замкнутая формула φ , которая **истинна** в любой интерпретации / с конечной предметной областью D_I , но **не является общезначимой**.

$$\forall x \neg R(x, x) \ \& \ \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow \exists x \forall y \neg R(x, y).$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

$R(x, y)$: «субъект y — начальник субъекта x »;

1). $\forall x \neg R(x, x)$: «никто не командует самим собой»;

2). $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))$: «начальник моего начальника — мой начальник»;

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$: «кто-то никому не подчиняется».

В каждой компании с конечным множеством сотрудников, в которой действуют законы 1) и 2), выполняется и закон 3).

Значит, наша формула истинна во всех интерпретациях с конечной предметной областью.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Доказательство.

Но наша формула не является общезначимой.

$R(x, y)$: «натуральное число y больше натурального числа x »

1). $\forall x \neg R(x, x)$;

2). $\forall x \forall y \forall z (R(x, y) \& R(y, z) \rightarrow R(x, z))$;

выполняются на множестве натуральных чисел.

3). $\exists x \forall y \neg R(x, y)$ на множестве натуральных чисел не выполняется: неверно, что существует максимальное натуральное число.



ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Не только перебор всех интерпретаций, но даже проверку истинности формулы в интерпретации с бесконечной предметной областью осуществить затруднительно.

Значит, необходимо придумать более изощренный способ проверки.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$| \quad I \not\models \varphi$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} I \not\models \varphi \\ I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x P(x) & I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x) \\ & I \not\models \forall x R(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$$\begin{array}{l|l} I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) & I \not\models \varphi \\ I \models \forall x P(x) & I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x) \\ & I \not\models \forall x R(x) \\ & I \not\models R(x)[d] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда должна существовать интерпретация I (контрмодель), опровергающая φ . Изучим эту контрмодель.

$I \models \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$	$I \not\models \varphi$
$I \models \forall x P(x)$	$I \not\models \forall x P(x) \rightarrow \forall x R(x)$
	$I \not\models \forall x R(x)$
	$I \not\models R(x)[d]$
$I \models (P(x) \rightarrow R(x))[d]$	
$I \models P(x)[d]$	
$I \models R(x)[d]$	

Получили противоречие. Значит, контрмодели I не существует.

Значит, $\models \varphi$.

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$| I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x))$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$I \models \exists x (P(x)) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \not\models \forall x P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$\begin{array}{l|l} I \models \exists x (P(x)) & I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \models P(x)[d_1] & I \not\models \forall x P(x) \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$\begin{array}{l|l} I \models \exists x (P(x)) & I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \models P(x)[d_1] & I \not\models \forall x P(x) \\ & I \not\models P(x)[d_2] \end{array}$$

ПРОБЛЕМА ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛ

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$$\varphi = \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) .$$

Предположим, что φ необщезначима. Тогда существует интерпретация I (контрмодель), которая опровергает φ .

$$\begin{array}{l|l} I \models \exists x (P(x)) & I \not\models \exists x (P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \\ I \models P(x)[d_1] & I \not\models \forall x P(x) \\ & I \not\models P(x)[d_2] \end{array}$$

Противоречия нет.

$I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $\mathbf{P}(d_1) = \mathbf{true}$, $\mathbf{P}(d_2) = \mathbf{false}$,
 $I \not\models \varphi$.

Следовательно, $\not\models \varphi$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Попробуем систематизировать этот способ проверки общезначимости формул.

- ▶ Общезначимость формулы доказываем «от противного», пытаясь построить контрмодель.
- ▶ Контрмодель строим, указывая, какие формулы должны в ней выполняться, а какие нет. Требования (не)выполнимости формул, предъявляемые к контрмодели, сводим в таблицу и последовательно их уточняем.
- ▶ Если требования, которые предъявляются к контрмодели, оказываются несовместными, значит, проверяемая формула неопровержима, т. е. общезначима.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица — это упорядоченная пара множеств формул $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$, $\Gamma, \Delta \subseteq \text{Form}$.

Γ — это множество формул, которые мы хотим считать истинными,

Δ — это множество формул, которые мы хотим считать ложными.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — множество свободных переменных в формулах множеств Γ, Δ .

Семантическая таблица $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$ называется **выполнимой**, если существует такая интерпретация I и такой набор значений $d_1, d_2, \dots, d_n \in D_I$ свободных переменных, для которых

- ▶ $I \models \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы φ , $\varphi \in \Gamma$,
- ▶ $I \not\models \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)[d_1, d_2, \dots, d_n]$ для любой формулы ψ , $\psi \in \Delta$.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Примеры

Семантическая таблица

$$T = \langle \{ \exists x P(x), \neg P(y) \} ; \{ \forall x P(x), P(x) \& \neg P(x) \} \rangle$$

выполнима. Ее выполнимость подтверждает интерпретация $I = \langle D_I, \overline{Pred} \rangle$: $D_I = \{d_1, d_2\}$, $P(d_1) = \text{true}$, $P(d_2) = \text{false}$, и набор d_1, d_2 значений свободных переменных x, y .

Семантическая таблица

$$T = \langle \emptyset ; \{ \exists y \forall x R(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y) \} \rangle$$

невыполнима. Почему?

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Теорема (о табличной проверке общезначимости)

$\models \varphi \iff$ таблица $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ невыполнима.

Доказательство. $\models \varphi \iff$ для любой интерпретации I и для любого набора $d_1, \dots, d_n \in D_I$ значений свободных переменных $x_1, \dots, x_n$ имеет место $I \models \varphi(x_1, \dots, x_n)[d_1, \dots, d_n] \iff$ таблица $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ невыполнима ни в одной интерпретации.



СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Семантическая таблица $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$, у которой $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$, называется **закрытой**.

Утверждение

Закрытая таблица невыполнима.

Доказательство. **Самостоятельно.**

Семантическая таблица $\langle \Gamma ; \Delta \rangle$, у которой множества Γ, Δ состоят только из атомарных формул, называется **атомарной**.

Утверждение

Незакрытая атомарная таблица выполнима.

Доказательство. **Самостоятельно.**

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Таким образом, для доказательства общезначимости $\models \varphi$ достаточно разработать систему правил, позволяющих преобразовывать семантическую таблицу $T_\varphi = \langle \emptyset ; \{\varphi\} \rangle$ к закрытым таблицам.

Доказательства такого вида называются **логическим выводом**. Если в выводе участвуют семантические таблицы, то логический вывод называется **табличным**.

Чтобы табличный вывод был корректным, правила преобразования таблиц (**правила табличного вывода**) должны сохранять выполнимость семантических таблиц.

Поэтому начнем с разработки правил табличного вывода и проверки их корректности.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 3.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

zakh@cs.msu.su

Лекция 4.

Подстановки.

Табличный вывод.

Корректность табличного вывода.

ПОДСТАНОВКИ

Подстановка — это всякое отображение $\theta : Var \rightarrow Term$, сопоставляющее каждой переменной некоторый терм.

Подстановки нужны для того, чтобы иметь возможность переходить от общих утверждений $\forall x \forall y P(x, y)$ к их частным вариантам $P(f(z), c)$.

Множество $Dom_\theta = \{x : \theta(x) \neq x\}$ называется **областью подстановки**. Если область подстановки — это конечное множество переменных, то такая подстановка называется конечной. Множество конечных подстановок обозначим **Subst**.

Если $\theta \in Subst$ и $Dom_\theta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то подстановка θ однозначно определяется множеством пар

$$\{x_1/\theta(x_1), x_2/\theta(x_2), \dots, x_n/\theta(x_n)\}.$$

Каждая пара $x_i/\theta(x_i)$ называется **связкой**.

ПОДСТАНОВКИ

Для заданного логического выражения E и подстановки θ запись $E\theta$ обозначает **результат применения подстановки θ к E** , который определится так:

Если $E = x$, $x \in Var$, то $E\theta = \theta(x)$;

Если $E = c$, $c \in Const$, то $E\theta = c$;

Если $E = f(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то $E\theta = f(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_k\theta)$;

Если $E = P(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то $E\theta = P(t_1\theta, t_2\theta, \dots, t_k\theta)$;

Если $E = \varphi \& \psi$, то $E\theta = \varphi\theta \& \psi\theta$

(аналогично для формул $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg \varphi$);

Если $E = \forall x_0 \varphi$, то $E\theta = \forall x_0 (\varphi\theta')$, где θ' — новая подстановка, удовлетворяющая условию

$$\theta'(x) = \begin{cases} x_0, & \text{если } x = x_0, \\ \theta(x), & \text{если } x \neq x_0, \end{cases}$$

(аналогично для формул $\exists x_0 \varphi$).

ПОДСТАНОВКИ

Пример

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

$$\theta = \{ x/g(x, c), y/x, z/f(z) \}$$

Выделяются все свободные вхождения переменных в φ

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists yP(y)$$

К свободным вхождениям переменных применяется θ

$$\varphi\theta : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x)) \rightarrow R(f(g(x, c))) \vee \exists yP(y)$$

ПОДСТАНОВКИ

В результате применения некоторых подстановок смысл утверждений (формул) может значительно исказиться.

«Если у каждого есть дед, то у субъекта x тоже есть дед»

$$\varphi(x) : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(x, y)$$

Очевидно, $\models \varphi(x)$

Применим к $\varphi(x)$ подстановку $\theta = \{ x/y \}$

$$\varphi(x)\theta : \forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y P(y, y)$$

«Если у каждого есть дед, то есть и такие, которые приходятся дедом самим себе»

Очевидно, $\not\models \varphi(x)\theta$

Как странно: общее утверждение $\varphi(x)$ верно, а его частный случай $\varphi(x)\theta$ — нет.

ПОДСТАНОВКИ

Переменная x называется **свободной для терма t** в формуле $\varphi(x)$, если любое свободное вхождение переменной x в формуле $\varphi(x)$ не лежит в области действия ни одного квантора, связывающего переменную из множества Var_t .

Подстановка $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$ называется **правильной для формулы φ** , если для любой связки x_i/t_i переменная x_i свободна для терма t_i в формуле φ .

Пример

Переменная y не является свободной для терма $f(x, z)$ в формуле φ

$$\varphi : \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(y)) \rightarrow R(f(x)) \vee \exists y P(y)$$

А вот для терма $f(y, z)$ переменная y в формуле φ свободна.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода имеют вид

$$\frac{T_0}{T_1} \quad \text{или} \quad \frac{T_0}{T_1, T_2},$$

где T_0, T_1, T_2 — семантические таблицы. Прочтение правила таково:

Таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или T_2).

В тех случаях, когда таблица T_0 редуцируется в пару таблиц T_1, T_2 , будем говорить, что правило имеет альтернативы.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\& \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \& \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\& \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \& \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle, \langle \Gamma \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\vee \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \vee \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle}$$

$$R\vee \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \vee \psi \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi, \psi \rangle}$$

$$L\rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi \mid \Delta \rangle, \langle \Gamma \mid \varphi, \Delta \rangle}$$

$$R\rightarrow \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rightarrow \psi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta, \psi \rangle}$$

$$L\neg \quad \frac{\langle \Gamma, \neg \varphi \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \varphi \rangle}$$

$$R\neg \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \neg \varphi \rangle}{\langle \Gamma, \varphi \mid \Delta \rangle}$$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\forall \quad \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} | \Delta \rangle}$$

переменная x свободна для терма t
в формуле $\varphi(x)$

$$R\forall \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \forall x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \varphi(x)\{x/c\} \rangle}$$

константа c не содержится в формулах
из Γ , Δ и в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Правила табличного вывода

$$L\exists \quad \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} | \Delta \rangle}$$

константа c не содержится в формулах из Γ , Δ и в формуле $\varphi(x)$

$$R\exists \quad \frac{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma | \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x) \{x/t\} \rangle}$$

переменная x свободна для терма t в формуле $\varphi(x)$

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы
в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\forall$ не придерживаться
правильных подстановок, то **выполнимая таблица**

$$- L\forall : \frac{\langle \forall x \exists y R(x, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}{\langle \forall x \exists y R(x, y), \exists y R(y, y) \mid \exists y R(y, y) \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу**.

Причина в том, что переменная x несвободна для терма y в формуле $\exists y R(x, y)$.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Зачем нужны ограничения на подставляемые термы
в правилах $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$?

Если в правиле табличного вывода $L\exists$ подставить «несвежую» константу, то **выполнимая таблица**

$$- L\exists : \frac{\langle \exists x P(x) \mid P(c) \rangle}{\langle P(c) \mid P(c) \rangle}$$

преобразуется в **закрытую**, т.е. **невыполнимую таблицу** .

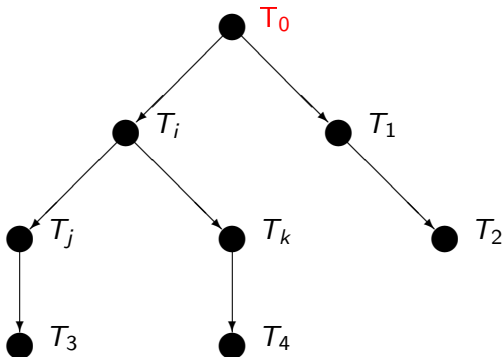
Причина в том, что константа, подставляемая вместо переменной x , должна быть отлична от всех ранее использованных констант.

ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод для таблицы T_0 — это корневое дерево, вершинами которого служат семантические таблицы и при этом

- 1) корнем дерева является таблица T_0 ;



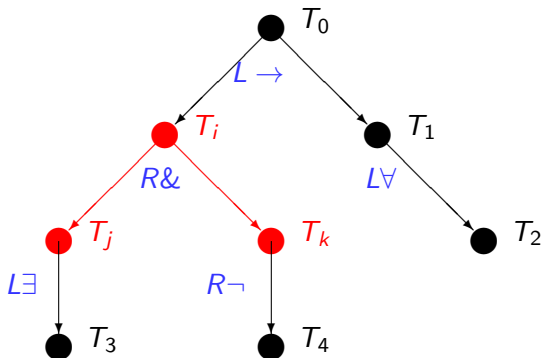
ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

2) из вершины T_i исходят дуги в вершины T_j (T_k)

$\Leftrightarrow$

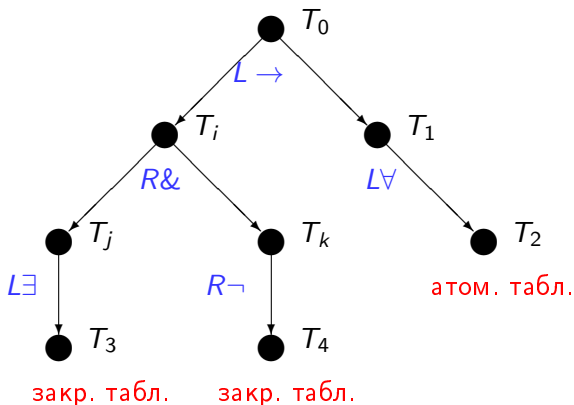
$\frac{T_i}{T_j, (T_k)}$ — правило табличного вывода;



ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

- 3) листьями дерева могут быть только закрытые и атомарные таблицы.



ТАБЛИЧНЫЙ ВЫВОД

Определение табличного вывода

Табличный вывод будем называть **успешным** (или **табличным опровержением**), если дерево вывода — конечное, и все листья дерева — закрытые таблицы.

Существование успешного вывода означает, что корневая семантическая таблица T_0 невыполнима.

Если $T_0 = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$, то это означает, что $\models \varphi$.

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

$$\begin{array}{c}
 T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle \\
 \downarrow (R \rightarrow) \\
 T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle
 \end{array}$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

$\downarrow$ ($R \rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

$\downarrow$ ($R \rightarrow$)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

↓ $(R \rightarrow)$

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

↓ $(R \rightarrow)$

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

↓ $(R\forall)$

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

↓ $(L\forall)$

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

(R $\forall$)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\rightarrow$)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c) \mid \forall xP(x), B(c), P(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c), P(c) \mid \forall xP(x), P(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

(R $\rightarrow$)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

(R $\forall$)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\forall$)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L $\rightarrow$)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c) \mid \forall xP(x), B(c), P(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), B(c), P(c) \mid \forall xP(x), P(c) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x)) \rangle$$

(R →)

$$T_1 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)) \mid \forall xP(x) \rightarrow \forall xB(x) \rangle$$

(R →)

$$T_2 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid \forall xB(x) \rangle$$

(R∀)

$$T_3 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x) \mid B(c) \rangle$$

(L∀)

$$T_4 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L∀)

$$T_5 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), P(c) \rightarrow B(c), \forall xP(x), P(c) \mid B(c) \rangle$$

(L →)

$$T_6 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \mid B(c) \rangle \quad T_7 = \langle \forall x(P(x) \rightarrow B(x)), \mid B(c), P(c) \rangle$$

$$\forall xP(x), B(c), P(c) \quad \forall xP(x), P(c)$$

закрытая таблица

закрытая таблица

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall x P(x)) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x)) \rangle$$

$$\downarrow \quad (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle \exists xP(x) \mid \forall xP(x) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$\downarrow (R \rightarrow)$$

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$\downarrow$ ($R \rightarrow$)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$\downarrow$ ($L\forall$)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R →)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(L ∀)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R ∃)

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

$$T_0 = \langle \emptyset \mid \forall y \exists x P(x, y) \rightarrow \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R →)

$$T_1 = \langle \forall y \exists x P(x, y) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(L∀)

$$T_2 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R∃)

$$T_3 = \langle \forall y \exists x P(x, y), \exists x P(x, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(L∃)

$$T_4 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid \forall y P(c_2, y), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$

↓
(R∀)

$$T_5 = \langle \forall y \exists x P(x, y), P(c_3, c_1) \mid P(c_2, c_4), \exists x \forall y P(x, y) \rangle$$



∞

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Лемма о корректности правил вывода

Каково бы ни было правило табличного вывода

$L\&, R\&, LV, RV, L\rightarrow, R\rightarrow, L\neg, R\neg, LV, RV, L\exists, R\exists$

$$\frac{T_0}{T_1, (T_2)},$$

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2).

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L \rightarrow: \frac{\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle, \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle}.$

Таблица $\langle \Gamma, \varphi \rightarrow \psi | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$
существует интерпретация I и набор $\bar{\mathbf{d}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models (\varphi \rightarrow \psi)[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \text{ или } I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \models \psi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} I \models \Gamma[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \Delta[\bar{\mathbf{d}}], \\ I \not\models \varphi[\bar{\mathbf{d}}] \end{array} \right. \iff \end{aligned}$$

одна из таблиц $T_1 = \langle \Gamma, \psi | \Delta \rangle$ или $T_2 = \langle \Gamma | \varphi, \Delta \rangle$ выполнима.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Аналогично доказывается корректность остальных 7 правил для логических связок

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\forall$:
$$\frac{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle}.$$

Таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0) | \Delta \rangle$ выполнима $\iff$ существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases} \quad \text{Пусть } d_0 = t[d_1, \dots, d_n]. \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} I \models (\forall x_0 \varphi)[d_1, \dots, d_n] &\Rightarrow I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \\ &\Rightarrow I \models \varphi[t[d_1, \dots, d_n], d_1, \dots, d_n] \Rightarrow I \models \varphi\{x_0/t\}[d_1, \dots, d_n]. \end{aligned}$$

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \forall x_0 \varphi(x_0), \varphi(x_0)\{x_0/t\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации I .

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что переменная x_0 свободна для терма t в формуле φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим правило $L\exists: \frac{\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} | \Delta \rangle}$.

Очевидно, что выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \varphi(x) \{x/c\} | \Delta \rangle$ влечет выполнимость таблицы $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$

Допустим, что выполнима таблица $\langle \Gamma, \exists x \varphi(x) | \Delta \rangle$. Тогда существует интерпретация I и набор $d_1, \dots, d_n$ значений свободных переменных, для которых

$$\begin{cases} I \models \Gamma[d_1, \dots, d_n], \\ I \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n], \\ I \models (\exists x \varphi)[d_1, \dots, d_n] \end{cases}$$

Выполнимость $\exists x \varphi[d_1, \dots, d_n]$ означает, что существует такой элемент $d_0 \in D_I$, что $I \models \varphi[d_0, d_1, \dots, d_n]$.

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы

Рассмотрим интерпретацию J , которая отличается от I , только тем, что в J константа c имеет другое значение, а именно $\bar{c} = d_0$.

Тогда $J \models (\varphi\{x/c\})[d_1, \dots, d_n]$.

Кроме того, $J \models \Gamma[d_1, \dots, d_n]$ и $J \not\models \Delta[d_1, \dots, d_n]$.

Следовательно, таблица $\langle \Gamma, \varphi(x)\{x/c\} | \Delta \rangle$ выполнима в интерпретации J .

На каком этапе доказательства существенно используется тот факт, что константа c не входит в состав формул из Γ , Δ и формулы φ ?

КОРРЕКТНОСТЬ ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности табличного вывода

Если для семантической таблицы T_0 существует успешный табличный вывод, то таблица T_0 невыполнима.

Доказательство

Следует из

- ▶ определения табличного вывода,
- ▶ леммы о корректности правил табличного вывода,
- ▶ и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц.

Следствие

Если для таблицы $T_\varphi = \langle \emptyset \mid \varphi \rangle$ можно построить успешный табличный вывод, то $\models \varphi$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 4.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

`zakh@cs.msu.su`

<http://mathcyb.cs.msu.su/courses/logprog.html>

Лекция 5.

Полнота табличного вывода.

Теорема Левенгейма-Сколема.

Теорема компактности Мальцева.

Автоматическое доказательство
теорем.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема полноты табличного вывода

Если семантическая таблица T_0 невыполнима, то для T_0 существует успешный табличный вывод.

Доказательство.

Проведем для упрощенного частного случая таблицы T_0 , в которой

- ▶ имеется лишь конечное число формул,
- ▶ все формулы замкнутые,
- ▶ в формулах нет функциональных символов.

Пусть $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$ — невыполнимая таблица. Будем строить табличный вывод для T_0 , руководствуясь следующей стратегией.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.

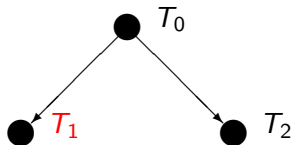
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



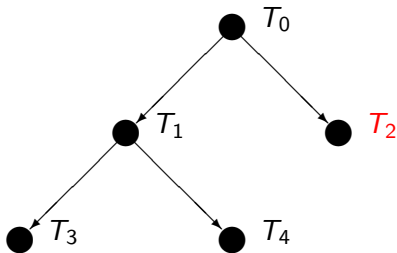
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



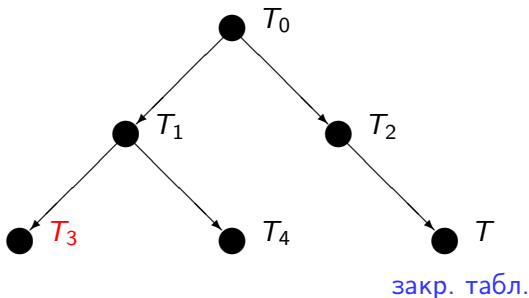
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



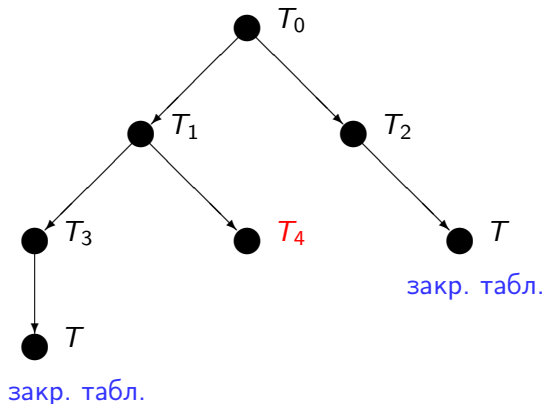
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



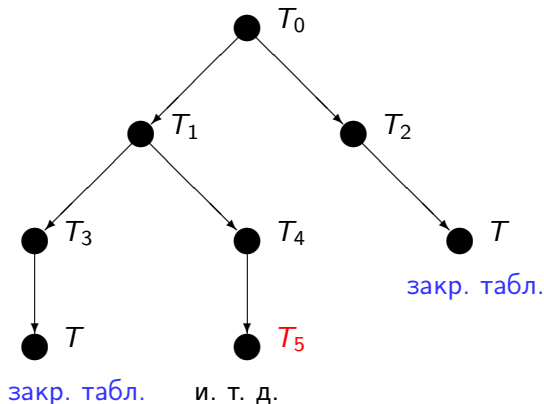
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 1). Каждая незакрытая таблица в дереве вывода получает порядковый номер, и правила табличного вывода применяются к таблицам в порядке возрастания их номеров.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$\begin{array}{c} T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (L\forall) \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x \varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$\begin{array}{c} T_0 = \langle \forall x \varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (L\forall) \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x \varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$\begin{array}{c} T_0 = \langle \forall x\varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (L\forall) \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle \\ \downarrow (RV) \\ T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2 \rangle \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.

$$T_0 = \langle \forall x\varphi, \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

$\downarrow$
(L $\forall$)

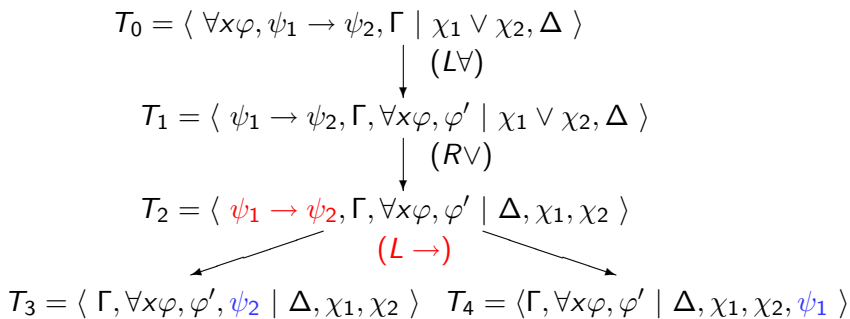
$$T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \chi_1 \vee \chi_2, \Delta \rangle$$

$\downarrow$
(R $\vee$)

$$T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \forall x\varphi, \varphi' \mid \Delta, \chi_1, \chi_2 \rangle$$

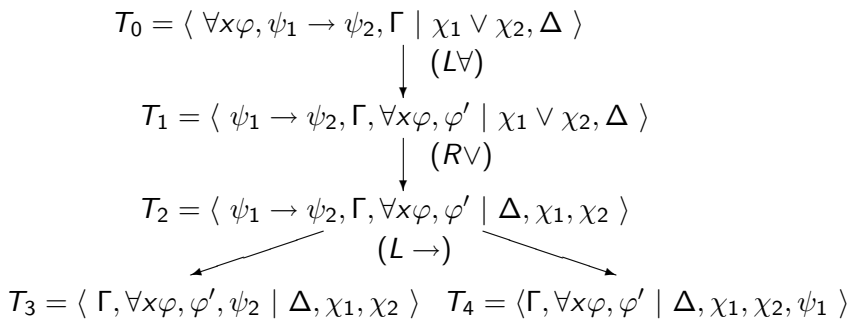
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВООДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 2). Таблицы состоят из упорядоченных множеств формул (списков). Правила применяются к формулам в порядке их расположения в списках. Формулы, участвующие в применении правил, помещаются в хвост нужного списка. Атомарные формулы просто переходят из головы списка в его хвост.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c', c''\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} \\ \downarrow (L\exists) & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} \\ \downarrow (L\exists) & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} \end{array}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} & \\ \downarrow (L\exists) & & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} & \\ \downarrow (R\forall) & & \\ T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2) \rangle, & L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\} & \end{array}$$

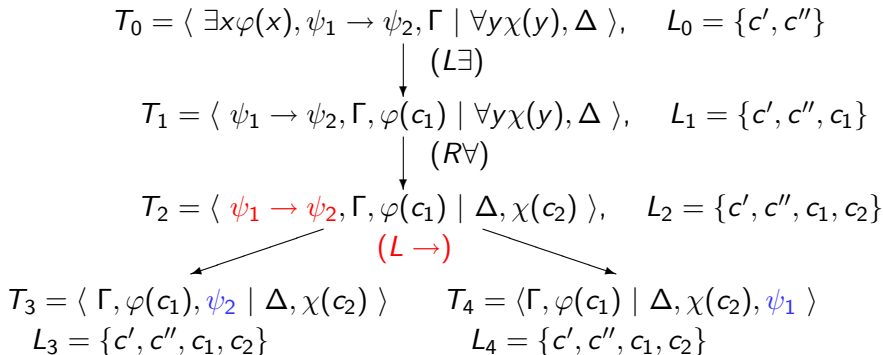
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.

$$\begin{array}{ccc} T_0 = \langle \exists x \varphi(x), \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_0 = \{c', c''\} & \\ \downarrow (L\exists) & & \\ T_1 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \forall y \chi(y), \Delta \rangle, & L_1 = \{c', c'', c_1\} & \\ \downarrow (R\forall) & & \\ T_2 = \langle \psi_1 \rightarrow \psi_2, \Gamma, \varphi(c_1) \mid \Delta, \chi(c_2) \rangle, & L_2 = \{c', c'', c_1, c_2\} & \end{array}$$

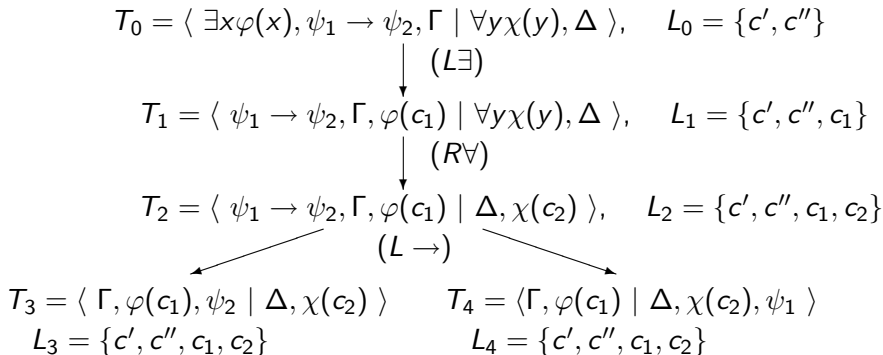
ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 3). С каждой таблицей T ассоциирован список использованных констант L_T . Вначале в этот список включаются все константы, содержащиеся в таблице T_0 . В случае применения правил $(L\exists)$ и $(R\forall)$ в список порожденной таблицы добавляется «свежая константа». В остальных случаях список наследуется без изменений.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$\downarrow$
 $(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$\downarrow$
($L\forall$)

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$(R\exists)$

$$T_2 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x \chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2) \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$(R\exists)$

$$T_2 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x \chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2) \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

- 4). В случае применения к таблице T правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$ в качестве подстановочных термов используются все константы из списка L_T .

$$T_0 = \langle \forall x \varphi(x), \Gamma \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_0 = \{c_1, c_2\}$$

$(L\forall)$

$$T_1 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \exists y \chi(y), \Delta \rangle, \quad L_1 = \{c_1, c_2\}$$

$(R\exists)$

$$T_2 = \langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(c_1), \varphi(c_2) \mid \Delta, \exists x \chi(x), \chi(c_1), \chi(c_2) \rangle,$$

$$L_2 = \{c_1, c_2\}$$

и. т. д.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Предположим, что указанная стратегия не приводит к построению успешного вывода для невыполнимой таблицы $T_0 = \langle \Gamma_0 \mid \Delta_0 \rangle$. Тогда в дереве вывода либо существует бесконечная ветвь, не содержащая закрытых таблиц

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \dots$$

либо существует ветвь, оканчивающаяся незакрытой атомарной таблицей

$$T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow T_{atom} \longrightarrow \dots$$

Будем полагать, что в последнем случае последовательность таблиц также бесконечна.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

На основе бесконечной последовательности незакрытых таблиц $T_0, T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots$, каждая из которых имеет вид $T_n = \langle \Gamma_n \mid \Delta_n \rangle$ построим три множества:

- 1). $\Gamma_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$ множество всех формул из левых частей таблиц,
- 2). $\Delta_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$ множество всех формул из правых частей таблиц,
- 3). $L_\omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_{T_i}$ множество всех констант из списков констант, ассоциированных с таблицами из бесконечной ветви.

Используя множества $\Gamma_\omega, \Delta_\omega, L_\omega$, построим интерпретацию I_ω , в которой будет выполняться каждая таблица последовательности.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

$$I_\omega = \langle D_I, \overline{Const}, \overline{Pred} \rangle$$

$$D_I = L_\omega$$

предметная область состоит из всех константных символов, входящих в состав формул из Γ_ω и Δ_ω ,

$$\overline{Const} : Const \rightarrow L_\omega$$

значением $\bar{c}$ каждой константы c (как символа из алфавита) является ее собственное изображение c (как элемент множества L_ω), т. е. $\bar{c} = c$,

$$\overline{Pred} : Pred \rightarrow (L_\omega^n \rightarrow \{\mathbf{true}, \mathbf{false}\})$$

для каждого предикатного символа $P^{(n)}$ и набора элементов $c_{i_1}, \dots, c_{i_n}$ из L_ω

$$\overline{P}(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) = \mathbf{true} \iff P(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \in \Gamma_\omega.$$

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Покажем, что

любая формула φ , $\varphi \in \Gamma_\omega$, **выполнима** в интерпретации I_ω ,

любая формула ψ , $\psi \in \Delta_\omega$, **невыполнима** в интерпретации I_ω .

Доказательство проведем при помощи индукции по числу логических операций (связок и кванторов) в формуле.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Базис индукции

φ, ψ — атомарные формулы.

Во всех таблицах T_i содержатся только замкнутые формулы (почему ?).

Поэтому формулы φ, ψ имеют вид $P(c_{i_1}, \dots, c_{i_n})$.

Если $\varphi \in \Gamma_\omega$, то $\overline{P}(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) = \mathbf{true}$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Если $\psi \in \Delta_\omega$, то $\psi \notin \Gamma_\omega$ (почему ?).

Значит, $\overline{P}(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) = \mathbf{false}$, и поэтому $I_\omega \not\models \psi$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Предположим, что утверждение верно для всех формул, имеющих не более n связок и кванторов. Рассмотрим формулы φ, ψ , содержащие $n + 1$ связку и квантор.

Если $\varphi = \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_\omega$, то есть такая таблица $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$, что $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \in \Gamma_i$.

Согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, $j \geq i$, что $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ — первая формула в списке формул Γ_j . Поэтому либо $\varphi_1 \in \Delta_{j+1}$, либо $\varphi_2 \in \Gamma_{j+1}$.

В первом случае, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \not\models \varphi_1$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Во втором случае, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \models \varphi_2$, и поэтому $I_\omega \models \varphi$.

Итак, в обоих случаях получаем $I_\omega \models \varphi_1 \rightarrow \varphi_2$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Аналогичные рассуждения применимы и для других связок.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Если $\varphi = \forall x \varphi_1(x) \in \Gamma_\omega$, то формула $\forall x \varphi_1(x)$ бесконечно часто встречается в левых частях таблиц $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$ (почему ?).

Поэтому правило ($L\forall$) применяется к формуле $\forall x \varphi_1(x)$ бесконечно часто.

Тогда, согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, для любой константы c , $c \in L_\omega$, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, что $\varphi_1(c) \in \Gamma_j$.

Значит, согласно индуктивному предположению, $I_\omega \models \varphi_1(c)$ для любой константы c , $c \in L_\omega$.

Так как $D_I = L_\omega$, приходим к заключению о том, что $I_\omega \models \forall x \varphi_1(x)$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Индуктивный переход

Если $\varphi = \forall x \varphi_1(x) \in \Delta_\omega$, то есть такая таблица $T_i = \langle \Gamma_i | \Delta_i \rangle$, что $\forall x \varphi_1(x) \in \Delta_i$.

Согласно описанию применяемой стратегии построения табличного вывода, существует такая таблица $T_j = \langle \Gamma_j | \Delta_j \rangle$, $j \geq i$, что $\forall x \varphi_1(x)$ — первая формула в списке формул Δ_j .

Поэтому существует такая константа c , $c \in L_\omega$, что $\varphi_1(c) \in \Delta_{j+1}$.

Согласно индуктивному предположению, это означает, что $I_\omega \not\models \varphi_1(c)$, и поэтому $I_\omega \not\models \forall x \varphi_1(x)$.

Аналогичные рассуждения применимы и для формул с квантором $\exists$.

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВООДА

Таким образом,

любая формула φ , $\varphi \in \Gamma_\omega$, **выполнима** в интерпретации I_ω ,

любая формула ψ , $\psi \in \Delta_\omega$, **невыполнима** в интерпретации I_ω .

Поскольку, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_\omega$ и $\Delta_0 \subseteq \Delta_\omega$, приходим к заключению о том, что

$$I_\omega \models \Gamma_0, \quad I_\omega \not\models \Delta_0.$$

Это означает, что таблица T_0 выполнима в интерпретации I_ω вопреки условию о невыполнимости T_0 .

Источник полученного противоречия — предположение о невозможности построить успешный вывод, руководствуясь описанной стратегией. Значит, предложенная стратегия позволяет построить успешный вывод для всякой невыполнимой таблицы.



ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Это было упрощенное доказательство теоремы полноты. А насколько существенны те упрощения, которые были объявлены в начале доказательства? А именно,

- ▶ Какие изменения нужно внести в структуру данных, представляющих таблицы, чтобы доказательство можно было распространить и на таблицы, содержащие бесконечные множества формул?
- ▶ Какие изменения нужно внести в стратегию построения табличного вывода, чтобы построить успешный вывод для невыполнимой таблицы, формулы которой содержат сложные термы?
- ▶ Какие изменения нужно внести в определение интерпретации I_ω , чтобы доказательство можно было применить к таблицам, содержащим незамкнутые формулы?

ПОЛНОТА ТАБЛИЧНОГО ВЫВОДА

Теорема Геделя (о полноте)

Если формула φ общезначима, то существует успешный табличный вывод для таблицы $T_\varphi = \langle \emptyset | \varphi \rangle$.

Доказательство

Следует из теоремы полноты.

Итак, формула φ общезначима



для таблицы T_φ существует успешный вывод.

И в доказательстве теоремы полноты показано, **как** построить этот вывод.

ТЕОРЕМА ЛЕВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА

Теорема

Формула φ выполнима $\iff \varphi$ имеет модель с конечной или счетно-бесконечной предметной областью.

Доказательство

Если φ выполнима, то для таблицы $T_\varphi^* = \langle \varphi | \emptyset \rangle$ нельзя построить успешный вывод. Применим стратегию из доказательства теоремы полноты. Т. к. T_φ^* выполнима, получим дерево с ветвью, в которой нет закрытых таблиц.

$$T_\varphi^* = T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow T_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow T_n \longrightarrow T_{n+1} \longrightarrow \dots$$

Для этой ветви построим интерпретацию I_ω , в которой

- ▶ $D_i = L_\omega = \{c_1, c_2, \dots\}$ — конечное или счетно-бесконечное множество констант из таблиц последовательности;
- ▶ выполнимы все таблицы T_i (в т.ч. и T_φ^*).

ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ МАЛЬЦЕВА

Теорема

$\Gamma \models \varphi \iff$ существует такое конечное подмножество Γ' , $\Gamma' \subseteq \Gamma$, что $\Gamma' \models \varphi$.

Доказательство

1. $\Gamma \models \varphi \iff$ таблица $T = \langle \Gamma | \varphi \rangle$ невыполнима (почему?)
2. Таблица $T = \langle \Gamma | \varphi \rangle$ невыполнима $\iff$ существует успешный вывод для T (почему?)
3. успешный вывод — это конечное дерево, и поэтому существует лишь конечное множество формул Γ' , $\Gamma' \subseteq \Gamma$, к которым применяются правила вывода.
4. Но тогда для таблицы $T = \langle \Gamma' | \varphi \rangle$ существует точно такой же успешный вывод.
5. Значит, $\Gamma' \models \varphi$.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Стратегия построения табличного вывода, использованная в доказательстве **теоремы полноты** — это алгоритм построения доказательства истинности утверждений, выраженных формулами логики предикатов.

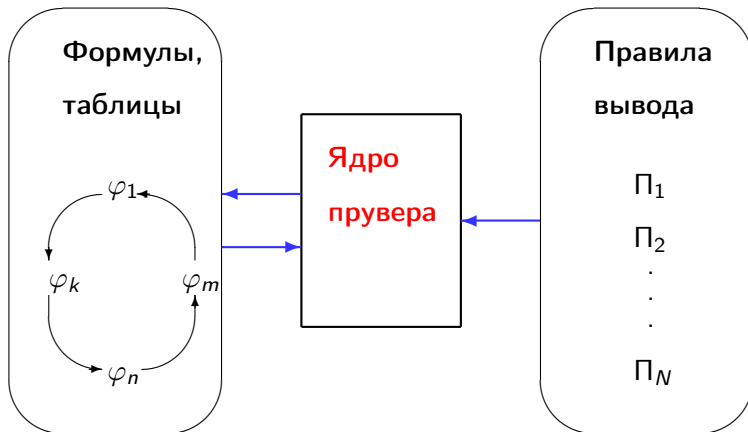
Автоматические системы построения доказательств (логических выводов) называются **пруверами**. От прuverов требуются следующие качества:

- ▶ **корректность** (абсолютно необходимо)
- ▶ **полнота** (очень-очень желательно)
- ▶ **эффективность** (желательно)

Первый прuver (крайне неэффективный) был разработан в 1957 в США (Newell, Simon, Shaw)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Общая схема прuvera



АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Наш прuver (табличный вывод) корректен и полон. Но насколько он эффективен?

В алгоритме построения дерева табличного вывода применяется двойной переборный поиск:

- ▶ **выбор формулы** , к которой нужно применить правило ввода,
- ▶ **выбор правила** , которое нужно применять к формуле.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород)	В Киеве дядька. $\exists y(\text{Дядька}(y) \& \text{Живет}(y, \text{Киев}))$

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород) Все в огороде посадил дядька. $\forall x(\text{Растет}(x, \text{огород}) \rightarrow$ $\exists y(\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$;	В Киеве дядька. $\exists y(\text{Дядька}(y) \&$ $\text{Живет}(y, \text{Киев}))$

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Выбор формулы

Трудно избежать перебора всех формул таблицы.

База знаний	Запрос
В огороде бузина. Растет(бузина, огород)	В Киеве дядька. $\exists y(\text{Дядька}(y) \& \text{Живет}(y, \text{Киев}))$
Все в огороде посадил дядька. $\forall x(\text{Растет}(x, \text{огород}) \rightarrow \exists y(\text{Посадил}(y, x) \& \text{Дядька}(y)))$;	
Бузину посадил киевлянин. $\forall x(\text{Посадил}(x, \text{бузина}) \rightarrow \text{Живет}(x, \text{Киев}))$;	

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Наиболее критичный этап построения табличного вывода — выбор нужного правила. Это касается правил $(L\forall)$ и $(R\exists)$.

$$L\forall \quad \frac{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x) \mid \Delta \rangle}{\langle \Gamma, \forall x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \mid \Delta \rangle}$$

$$R\exists \quad \frac{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x) \rangle}{\langle \Gamma \mid \Delta, \exists x \varphi(x), \varphi(x)\{x/t\} \rangle}$$

поскольку выбор терма t правилами не оговаривается. Простой перебор всех термов практически невозможен. (почему ?)

АВТОМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Потому что термов очень-очень много. Если есть один двухместный функциональный символ $f^{(2)}$ и две константы c_1, c_2 , то с их помощью можно построить более 10^{1000} основных термов высоты 10. Это количество значительно превосходит число наносекунд, прошедших с момента Большого Взрыва. Значит, нужно придумать способ, позволяющий быстро и точно вычислять тот терм, который нужно подставлять вместо переменных, связанных кванторами.

Эту задачу в 1964 г. сумели решить Дж. Робинсон (метод резолюций) и С. Маслов (обратный метод ε -термов).

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 5.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

`zakh@cs.msu.su`

`http://mk.cs.msu.su`

Лекция 6.

Общая схема метода резолюций.

Равносильные формулы.

Теорема о равносильной замене.

Предваренная нормальная форма.

Сколемовская стандартная форма.

Системы дизъюнктов.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi ?$$

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости.

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg \varphi$$

φ общезначима $\iff \varphi_0$ противоречива.

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_0 равносильна φ_1 , т. е. $I \models \varphi_0 \iff I \models \varphi_1$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_k} (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

φ_1 противоречива $\iff \varphi_2$ противоречива.

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, D_2, \dots, D_N\},$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{im_i}$.

φ_2 противоречива $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Этап 5. Резолютивный вывод тождественно ложного (противоречивого) дизъюнкта $\square$ из системы S_φ .

Правило резолюции *Res* :
$$\frac{D_1 = D'_1 \vee L, D_2 = D'_2 \vee \neg L}{D_0 = D'_1 \vee D'_2}.$$

Дизъюнкт D_0 называется **резольвентой** дизъюнктов D_1 и D_2 .

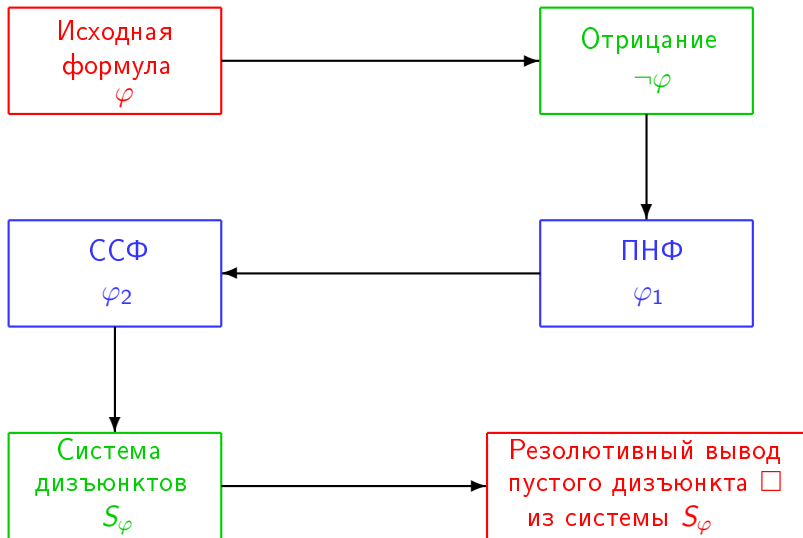
Резольвенты строят, пока не будет получен **пустой дизъюнкт** $\square$.
Это возможно в случае $D_1 = L, D_2 = \neg L$:

$$\frac{D_1 = L, D_2 = \neg L}{D_0 = \square}$$

Система дизъюнктов S_φ противоречива $\Leftrightarrow$ из S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ИТОГ. Формула φ общезначима $\Leftrightarrow$ из системы дизъюнктов S_φ резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИИ



РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Введем вспомогательную логическую связку **эквиваленции** $\equiv$.

Выражение $\varphi \equiv \psi$ — это сокращенная запись формулы $(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$.

Определение

Формулы φ и ψ будем называть **равносильными**, если формула $\varphi \equiv \psi$ общезначима, т. е. $\models (\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$.

Утверждение.

1. Отношение равносильности — это отношение эквивалентности.
2. Если формула φ общезначима (выполнима) и равносильна ψ , то формула ψ также общезначима (выполнима), т. е.

$$\models \varphi \text{ и } \models \varphi \equiv \psi \implies \models \psi$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

1. Удаление импликации. $\models \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$,

2. Переименование переменных.

$$\models \forall_{\exists} x \varphi(x) \equiv \forall_{\exists} y \varphi(y),$$

здесь формула $\varphi(x)$ не содержит свободных вхождений переменной y , а формула $\varphi(y)$ не содержит свободных вхождений переменной x .

3. Продвижение отрицания.

$$\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi,$$

$$\models \neg(\varphi \& \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi,$$

$$\models \neg\forall_{\exists} x \varphi \equiv \exists_{\forall} x \neg\varphi,$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Примеры равносильных формул

4. Вынесение кванторов.

$$\models \forall x \varphi(x) \& \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \& \psi),$$

$$\models \forall x \varphi(x) \vee \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \vee \psi),$$

здесь формула ψ не содержит свободных вхождений переменной x ,

5. Законы булевой алгебры.

$$\models \varphi \&_{\vee} \psi \equiv \psi \&_{\vee} \varphi,$$

$$\models \varphi \&_{\vee} (\psi \&_{\vee} \chi) \equiv (\varphi \&_{\vee} \psi) \&_{\vee} \chi,$$

$$\models \varphi \& (\psi \vee \chi) \equiv (\varphi \& \psi) \vee (\varphi \& \chi),$$

$$\models \varphi \vee (\psi \& \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \& (\varphi \vee \chi),$$

$$\models \varphi \&_{\vee} \varphi \equiv \varphi,$$

Доказать равносильность методом семантических таблиц.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Запись $\varphi[\psi]$ означает, что формула φ содержит подформулу ψ .
Запись $\varphi[\psi/\chi]$ обозначает формулу, которая образуется из формулы φ заменой некоторых (не обязательно всех) вхождений подформулы ψ на формулу χ .

Теорема

$$\models \psi \equiv \chi \implies \models \varphi[\psi] \equiv \varphi[\psi/\chi]$$

Доказательство

Индукцией по числу связок и кванторов в формуле φ

Базис. $\varphi[\psi] = \psi$. Очевидно.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Индуктивный переход. $\varphi[\psi] = \forall x \varphi_1[\psi](x)$.

По индуктивному предположению, если $\models \psi \equiv \chi$, то в любой интерпретации I и для любого элемента $d \in D_I$ верно

$$\begin{aligned} I &\models \varphi_1[\psi](d) \rightarrow \varphi_1[\psi/\chi](d) \\ I &\models \varphi_1[\psi/\chi](d) \rightarrow \varphi_1[\psi](d) \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} I &\models \forall x(\varphi_1[\psi](x) \rightarrow \varphi_1[\psi/\chi](x)) \\ I &\models \forall x(\varphi_1[\psi/\chi](x) \rightarrow \varphi_1[\psi](x)) \end{aligned}$$

Как следует из примера $\models \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$
(см. [Лекция 3](#)),

$$\begin{aligned} I &\models \forall x \varphi_1[\psi](x) \rightarrow \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x) \\ I &\models \forall x \varphi_1[\psi/\chi](x) \rightarrow \forall x \varphi_1[\psi](x) \end{aligned}$$

(Остальные случаи формулы φ — самостоятельно.)

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\text{Поскольку } \models \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg \varphi \vee \psi$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\text{Поскольку } \models \neg \forall x \varphi \equiv \exists x \neg \varphi$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\text{Поскольку } \models \exists x \varphi(x) \equiv \exists y \varphi(y)$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$.

$$\models \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \neg \forall x P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y)$$

$$\models \exists x \neg P(x) \vee \exists y P(y) \equiv \exists x \exists y (\neg P(x) \vee P(y))$$

$$\text{Поскольку } \models \exists x \varphi(x) \vee \psi \equiv \exists x (\varphi(x) \vee \psi)$$

ТЕОРЕМА О РАВНОСИЛЬНОЙ ЗАМЕНЕ

Равносильные замены позволяют упрощать формулы, полностью сохраняя при этом их значение (смысл).

Пример

Доказать общезначимость формулы $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$.

$$\models \forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x) \equiv \neg\forall xP(x) \vee \exists xP(x)$$

$$\models \neg\forall xP(x) \vee \exists xP(x) \equiv \exists x\neg P(x) \vee \exists xP(x)$$

$$\models \exists x\neg P(x) \vee \exists xP(x) \equiv \exists x\neg P(x) \vee \exists yP(y)$$

$$\models \exists x\neg P(x) \vee \exists yP(y) \equiv \exists x\exists y(\neg P(x) \vee P(y))$$

Таким образом, вопрос об общезначимости $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$ сводится к вопросу об общезначимости $\exists x\exists y(\neg P(x) \vee P(y))$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Замкнутая формула φ называется **предваренной нормальной формой (ПНФ)**, если

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n M(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где

- ▶ $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n$ — **кванторная приставка**, состоящая из кванторов $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$,
- ▶ $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — **матрица** — бескванторная конъюнктивная нормальная форма (КНФ), т. е.

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N,$$

где $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \dots \vee L_{ik_i}$ — **дизъюнкты**, состоящие из **литер** $L_{ij} = A_{ij}$ или $L_{ij} = \neg A_{ij}$, где A_{ij} — атомарная формула.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\forall x \exists y \exists z \forall u (P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z))),$$

кванторная приставка: $\forall x \exists y \exists z \forall u$

матрица: $P(x) \& \neg R(x, u) \& (\neg P(y) \vee R(x, z))$

дизъюнкты: $D_1 = P(x),$
 $D_2 = \neg R(x, u),$
 $D_3 = \neg P(y) \vee R(x, z)$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ПНФ

Для любой замкнутой формулы φ существует равносильная предваренная нормальная форма ψ .

Доказательство

Замкнутую формулу φ можно привести к ПНФ применением равносильных преобразований. Покажем, как это надо делать на примере формулы

$$\varphi = \neg \exists x((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

1. Переименование переменных.

Применяем равносильности $\models \forall x \varphi(x) \equiv \forall y \varphi(y)$

$$\varphi = \neg \exists x ((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \ \& \ (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y R(x_1, y))) \rightarrow \exists y R(x_1, y))$$

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \ \& \ (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1))) \rightarrow \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

Применяем равносильность $\models \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \& (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1))) \rightarrow \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

2. Удаление импликаций.

$$\neg \exists x_1 ((P(x_1) \& (\forall x_2 P(x_2) \rightarrow \exists y_1 R(x_1, y_1))) \rightarrow \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

Применяем равносильности

$$\models \neg\neg\varphi \equiv \varphi,$$

$$\models \neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi,$$

$$\models \neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \ \& \ (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\neg \neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \neg \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\neg \neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \neg \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

3. Продвижение отрицания вглубь.

$$\neg \exists x_1 (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \neg (\neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \vee \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\neg \neg (P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \neg \exists y_2 R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\neg \forall x_2 P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

Применяем равносильности

$$\models \forall x \varphi(x) \& \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \& \psi),$$

$$\models \forall x \varphi(x) \vee \psi \equiv \forall x (\varphi(x) \vee \psi),$$

$$\models \varphi \&_{\forall} \psi \equiv \psi \&_{\forall} \varphi.$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1 ((P(x_1) \ \& \ (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \ \& \ \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 ((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 (\exists x_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1(\exists x_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \exists x_2 ((P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

и так далее...

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

4. Вынесение кванторов «наружу».

$$\forall x_1((P(x_1) \& (\exists x_2 \neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1((P(x_1) \& \exists x_2 (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1(\exists x_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

$$\forall x_1 \exists x_2 ((P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee \exists y_1 R(x_1, y_1))) \& \forall y_2 \neg R(x_1, y_2))$$

и так далее...

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 ((P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1))) \& \neg R(x_1, y_2))$$

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме.
Применяем законы булевой алгебры.

ПРЕДВАРЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство

5. Приведение матрицы к конъюнктивной нормальной форме.

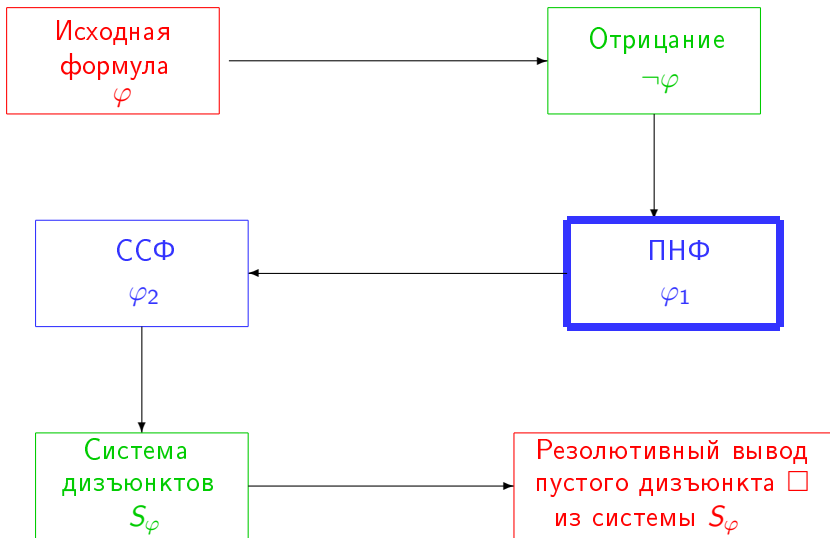
$$\psi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \& \neg R(x_1, y_2))$$

В результате получаем формулу ψ , которая

- ▶ является предваренной нормальной формой,
- ▶ равносильна исходной формуле φ .



ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Определение

Предваренная нормальная форма вида

$$\varphi = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_m} M(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}),$$

в которой кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$, называется **сколемовской стандартной формой (ССФ)**.

Примеры ССФ

$$\forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$R(c_1, f(c_1, c_2)) \vee P(c_2)$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Теорема о ССФ

Для любой замкнутой формулы φ существует такая сколемовская стандартная форма ψ , что

$$\varphi \text{ выполнима} \iff \psi \text{ выполнима.}$$

Доказательство

Воспользуемся леммой об удалении кванторов существования .

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Лемма об удалении кванторов существования

Пусть $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ — замкнутая формула, $k \geq 0$, и k -местный функциональный символ $f^{(k)}$ **не содержится** в формуле φ .

Тогда формула φ выполнима в том и только том случае, когда выполнима формула

$$\psi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)).$$

Доказательство леммы.

($\Leftarrow$) Пусть I — модель для ψ .

Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ имеет место

$$I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)],$$

т. е. для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} = f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)$, что

$$I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}].$$

Это означает, что $I \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \varphi_0$.

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Доказательство леммы об удалении $\exists$.

($\Rightarrow$) Пусть I — модель для φ . Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ существует такой элемент $d_{k+1} \in D_I$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.

Пусть $\bar{f} : D_I^k \rightarrow D_I$ — это некоторая функция, вычисляющая для каждого набора $d_1, d_2, \dots, d_k \in D_I$ такой элемент $d_{k+1} = \bar{f}(d_1, d_2, \dots, d_k)$, что $I \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}]$.

Рассмотрим интерпретацию I' , которая отличается от I только тем, что оценкой функционального символа $f^{(k)}$ является функция $\bar{f}$.

Тогда для любого набора $d_1, d_2, \dots, d_k$ верно $I' \models \varphi_0[d_1, d_2, \dots, d_k, f^{(k)}(d_1, d_2, \dots, d_k)]$. (почему?)

Это означает, что

$I' \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_k \varphi_0(x_1, x_2, \dots, x_k, f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_k))$.



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Продолжение доказательства теоремы об ССФ

Удаляем по очереди кванторы существования с помощью леммы.

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x_{k+1} \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2} \dots x_m, x_{m+1}, \dots)$$

$$\varphi' = \forall x_1 \dots \forall x_k \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \exists x_{m+1} \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), x_{k+2} \dots x_m, x_{m+1}, \dots)$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \dots \forall x_k \forall x_{k+2} \dots \forall x_m \dots \\ \varphi_0(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), x_{k+2} \dots x_m, g(x_1, \dots, x_k, x_{k+2}, \dots, x_m), \dots)$$

и. т. д.

При этом выполнимость формул сохраняется.



СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Пример

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \& (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \& \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi' = \forall x_1 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \& (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, y_1)) \& \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi'' = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \& (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \& \neg R(x_1, y_2))$$

$$\varphi \text{ выполнима} \iff \varphi'' \text{ выполнима.}$$

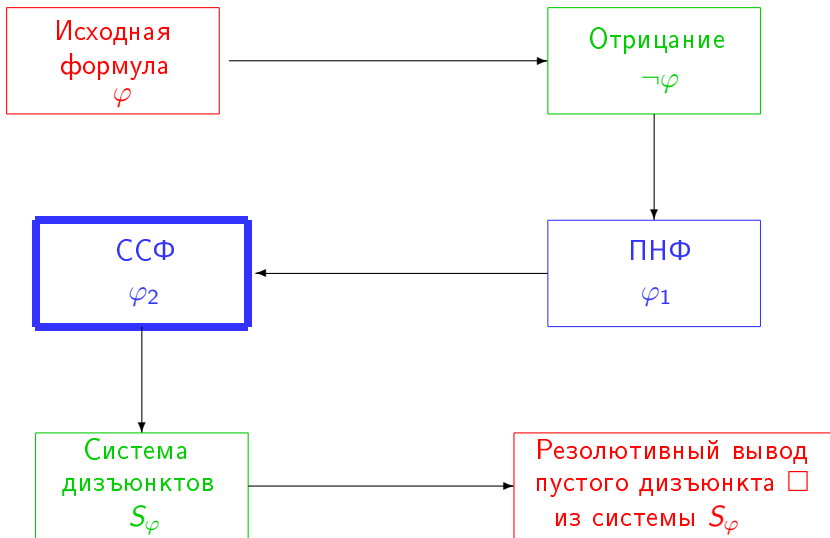
СКОЛЕМОВСКИЕ СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ

Терм $f^{(k)}(x_1, \dots, x_k)$, который подставляется вместо удаляемой переменной x_{k+1} , связанной квантором $\exists$, называется **сколемовским термом** .

Если $k = 0$, то терм называется **сколемовской константой** .

Процедура удаления кванторов $\exists$ называется **сколемизацией** .

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИИ



СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Утверждение

$$\models \forall x(\varphi \& \psi) \equiv \forall x\varphi \& \forall x\psi$$

Иначе говоря, кванторы $\forall$ можно равномерно распределить по сомножителям (дизъюнктам) КНФ.

Теорема

Сколемовская стандартная форма

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

невыполнима тогда и только тогда, когда множество формул

$$S_\varphi = \{\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_1, \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_2, \dots, \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m D_N\}$$

не имеет модели.

СИСТЕМЫ ДИЗЬЮНКТОВ

Каждая формула множества S_φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_m (L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_k)$$

и называется **дизъюнктом**.

В дальнейшем (по умолчанию) будем полагать, что все переменные дизъюнкта связаны кванторами $\forall$, и кванторную приставку выписывать **не будем**.

Каждый дизъюнкт состоит из **литер** $L_1, L_2, \dots, L_k$.

Литера — это либо атом, либо отрицание атома.

Особо выделен дизъюнкт, в котором **нет ни одной литеры**.

Такой дизъюнкт называется **пустым дизъюнктом** и обозначается $\square$. Пустой дизъюнкт $\square$ тождественно ложен (**почему?**).

Потому что $\models L_1 \vee \dots \vee L_k \equiv L_1 \vee \dots \vee L_k \vee \mathbf{false}$, и поэтому при $k = 0$ имеем $\models \square \equiv \mathbf{false}$.

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ

Систему дизъюнктов, не имеющую моделей, будем называть **невыполнимой**, или **противоречивой** системой дизъюнктов.

Задача проверки общезначимости формул логики предикатов.

$$\models \varphi ?$$

φ общезначима $\iff \varphi_0 = \neg\varphi$ невыполнима.

φ_0 невыполнима $\iff$ ПНФ φ_1 невыполнима.

φ_1 невыполнима $\iff$ ССФ φ_2 невыполнима.

φ_2 невыполнима $\iff$ система дизъюнктов S_φ невыполнима.

Итак, проверка общезначимости $\models \varphi ?$ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ .

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ: ПРИМЕР

Исходная формула:

$$\varphi = \exists x((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Ее отрицание:

$$\varphi_0 = \neg \exists x((P(x) \ \& \ (\forall x P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))) \rightarrow \exists y R(x, y))$$

Предваренная нормальная форма для φ_0 :

$$\varphi_1 = \forall x_1 \exists x_2 \exists y_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(x_2) \vee R(x_1, y_1)) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

Сколемовская стандартная форма:

$$\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_2 (P(x_1) \ \& \ (\neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1))) \ \& \ \neg R(x_1, y_2))$$

СИСТЕМЫ ДИЗЪЮНКТОВ: ПРИМЕР

Система дизъюнктов:

$$S_{\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = P(x_1), \\ D_2 = \neg P(f(x_1)) \vee R(x_1, g(x_1)), \\ D_3 = \neg R(x_1, y_2) \end{array} \right\}$$

Задача:
как проверить противоречивость
произвольной системы
дизъюнктов?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 6.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

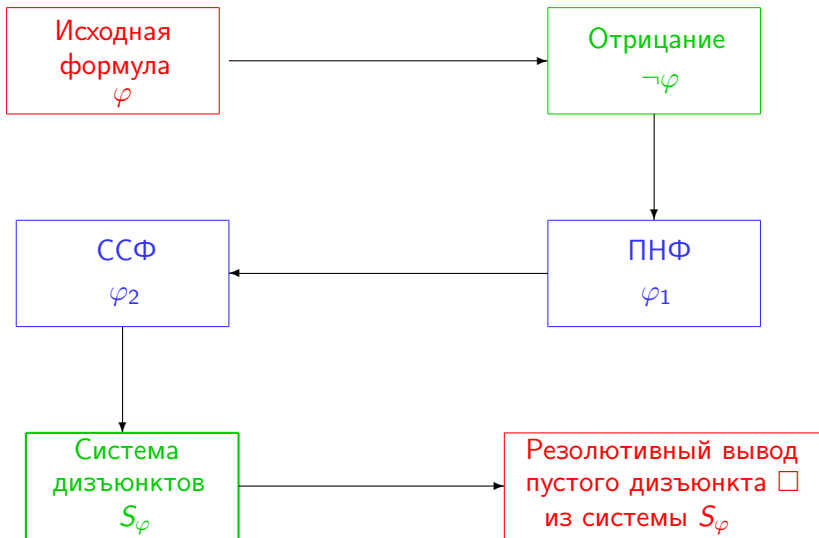
Лекция 7.

Эрбрановские интерпретации.

Теорема Эрбрана.

Задача унификации.

ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИИ



ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Проверка общезначимости формулы φ сводится к проверке противоречивости системы дизъюнктов S_φ .

Этап 1. Сведение проблемы общезначимости к проблеме противоречивости: $\varphi \rightsquigarrow \varphi_0 = \neg\varphi$

Этап 2. Построение предваренной нормальной формы (ПНФ).

$$\varphi_0 \rightsquigarrow \varphi_1 = Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

Этап 3. Построение сколемовской стандартной формы (ССФ).

$$\varphi_1 \rightsquigarrow \varphi_2 = \forall x_{i_1} \forall x_{i_2} \dots \forall x_{i_k} (D_1 \& D_2 \& \dots \& D_N)$$

Этап 4. Построение системы дизъюнктов.

$$\varphi_2 \rightsquigarrow S_\varphi = \{D_1, D_2, \dots, D_N\},$$

φ общезначимая $\iff$ система дизъюнктов S_φ противоречива.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Система дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ противоречива тогда и только тогда, когда

для каждой интерпретации I

в системе S найдется такой дизъюнкт

$$D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$$

и в предметной области D_i найдется такой набор элементов

$$d_1, \dots, d_n,$$

для которых имеют место

$$I \not\models L_{1i}[d_1, \dots, d_n], I \not\models L_{2i}[d_1, \dots, d_n], \dots, I \not\models L_{k_i i}[d_1, \dots, d_n].$$

А можно ли сократить множество рассматриваемых интерпретаций?

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Эрбрановские интерпретаций (H -интерпретации, названные так по имени французского математика **Herbrand**) — это специальная разновидность интерпретаций, в основе которых лежат **свободные алгебры**.

Предметная область эрбрановских интерпретаций называется **эрбрановским универсумом** (H -универсумом).

Определение H -универсума

Пусть задана некоторая сигнатура $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$.

Тогда **эрбрановским универсумом** σ называется множество

термов $H_\sigma = \bigcup_{i=0}^{\infty} H_i$, где

$$i = 0 \quad H_0 = \begin{cases} Const, & \text{если } Const \neq \emptyset, \\ \{c\}, & \text{если } Const = \emptyset \text{ (эрбрановская константа) }; \end{cases}$$

$$i \rightarrow i + 1 \quad H_{i+1} = H_i \cup \{f^{(k)}(t_1, \dots, t_k) : f^{(k)} \in Func, t_1, \dots, t_k \in H_i\}.$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Эрбрановский универсум — это множество всех термов, которые можно построить из констант и функциональных символов заданной сигнатуры. Термы эрбрановского универсума не содержат переменных и называются **основными термами**.

Пример

Пусть $Const = \emptyset$, $Func = \{f^{(1)}, g^{(2)}\}$. Тогда

$i = 0$ $H_0 = \{c\}$ (эрбрановская константа, т.к. $Const = \emptyset$);

$i = 1$ $H_1 = \{c, f(c), g(c, c)\}$;

$i = 2$ $H_2 = \{c, f(c), g(c, c),$
 $f(f(c)), f(g(c, c)), g(f(c), c), g(c, f(c)),$
 $g(f(c), f(c)), g(c, g(c, c)), g(g(c, c), c),$
 $g(g(c, c), g(c, c)), g(f(c), g(c, c)), g(g(c, c), f(c))\}$;

$i = 3$ и. т. д.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Определение H -интерпретации

Эрбрановская интерпретация $I_H = \langle H_\sigma, \overline{Const}_H, \overline{Func}_H, \overline{Pred} \rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle Const, Func, Pred \rangle$ состоит из

- ▶ **стандартной** предметной области — эрбрановского универсума H_σ ;
- ▶ **стандартной** оценки констант: $\overline{Const}_H(c) = c$, т. е. значением каждого константного символа c является его собственное изображение;
- ▶ **стандартной** оценки функциональных символов: $\overline{Func}_H(f^{(n)}) = \mathbf{f} : \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f^{(n)}(t_1, t_2, \dots, t_n)$, т. е. каждый функциональный символ f играет роль конструктора термов эрбрановского универсума;
- ▶ **произвольной** оценки предикатных символов.

Таким образом, разные H -интерпретации отличаются только истолкованием предикатных символов.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Преимущества эрбрановских интерпретаций.

- ▶ Не нужно заботиться о выборе области интерпретации — у всех H -интерпретаций одна и та же предметная область — H -универсум.
- ▶ Не нужно заботиться об оценке функциональных символов — у всех H -интерпретаций одна и та же стандартная оценка $Const$ и $Func$.
- ▶ И, как будет показано, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно ограничиться рассмотрением H -интерпретаций.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Теорема о H -интерпретациях

Система дизъюнктов S выполнима тогда и только тогда, когда S имеет эрбрановскую модель, т.е. выполнима хотя бы в одной H -интерпретации.

Доказательство

($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Пусть $S = \{D_1, \dots, D_N\}$, и $I = \langle \mathcal{D}_I, \overline{Const}_I, \overline{Func}_I, \overline{Pred}_I \rangle$ — некоторая модель для S , т. е. для любого дизъюнкта $D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ из S и для любого набора элементов $d_1, \dots, d_n$ из $\mathcal{D}_I$ имеет место

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[d_1, \dots, d_n].$$

Покажем, что существует H -интерпретация J_H , в которой выполняется каждый дизъюнкт D_i из S .

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Пусть σ — сигнатура системы дизъюнктов S . Рассмотрим эрбрановский универсум H_σ и отображение

$$\alpha : H_\sigma \rightarrow \mathcal{D}_I,$$

которое каждому основному терму $t \in H_\sigma$ сопоставляет элемент $\alpha(t) = d_t \in \mathcal{D}_I$, равный значению терма t в интерпретации I .

Оценку $\overline{Pred}_H$ предикатных символов в H -интерпретации J определим так:

для любого предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ положим

$$\overline{P}_H(t_1, \dots, t_m) = \mathbf{true} \iff \overline{P}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)) = \mathbf{true}.$$

Эта оценка однозначно определяет H -интерпретацию J_H

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Тогда для любого функционального символа f , предикатного символа P и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\alpha(f(t_1, \dots, t_m)) = \bar{f}_I(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)),$$

$$J_H \models P[t_1, \dots, t_m] \iff I \models P[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)]$$

Отображение α — это **гомоморфизм** интерпретации J_H в интерпретацию I .

Значит, для **любого** дизъюнкта $D' = \forall x_1 \dots \forall x_m (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ верно

$$\begin{aligned} J_H \models (L_1 \vee \dots \vee L_k)[t_1, \dots, t_m] \\ \iff \\ I \models (L_1 \vee \dots \vee L_k)[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_m)] \end{aligned}$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Доказательство

Итак, для любого дизъюнкта

$D_i = \forall x_1 \dots \forall x_n (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ из S и любого набора основных термов $t_1, \dots, t_n \in H_\sigma$ имеем

$$\begin{aligned} J_H \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[t_1, \dots, t_n] \\ \iff \\ I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$I \models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_n)],$$

все дизъюнкты из S выполнимы в построенной эрбрановской интерпретации J_H . □

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Следствие

Система дизъюнктов S противоречива тогда и только тогда, когда S невыполнима ни в одной эрбрановской интерпретации.

Значит, для проверки противоречивости систем дизъюнктов достаточно исследовать только эрбрановские интерпретации.

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Как задавать H -интерпретации?

Эрбрановские интерпретации полностью определяются оценкой предикатных символов. Значит, достаточно указать оценку всех предикатных символов.

Пусть $P^{(m)} \in \text{Pred}$, и $t_1, \dots, t_m \in H_\sigma$ — набор основных термов. Тогда формула $P^{(m)}(t_1, \dots, t_m)$ называется **основным атомом**. Множество всех основных атомов называется **эрбрановским базисом** и обозначается B_H .

Всякая H -интерпретация I задается подмножеством B^I истинных основных атомов:

$$B^I = \{P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) : I \models P^{(m)}(t_1, \dots, t_m), \{t_1, \dots, t_m\} \subseteq H\}.$$

ЭРБРАНОВСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Примеры

- ▶ $B^I = \emptyset$ соответствует интерпретации I , в которой все $\bar{P}$ тождественно ложны.

$$I \models P^{(m)}[t_1, \dots, t_m] \iff P^{(m)}(t_1, \dots, t_m) \in \emptyset.$$

- ▶ $B^I = B_H$ соответствует интерпретации I , в которой все $\bar{P}$ тождественно истинны.
- ▶ Пересечение $B^{I_1} \cap B^{I_2}$ задает интерпретацию, в которой истинны те и только те отношения, которые истинны в обеих интерпретациях I_1 и I_2 .

Значит, это очень удобный способ задания интерпретаций, позволяющий проводить над ними теоретико-множественные операции.

В дальнейшем все H -интерпретации мы будем ассоциировать с подмножествами эрбрановского базиса B_H .

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Вернемся к системам дизъюнктов

Пусть имеется дизъюнкт $D = \forall x_1 \dots \forall x_m (L_1 \vee \dots \vee L_k)$ и набор основных термов $t_1, \dots, t_m$ из эрбрановского универсума H_σ .

Тогда дизъюнкт $D' = (L_1 \vee \dots \vee L_k)\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$, полученный из D подстановкой основных термов $t_1, \dots, t_m$ вместо всех переменных дизъюнкта D называется **основным примером** дизъюнкта D .

Пример

$D = \forall x_1 \forall x_2 (\neg R(x_1, x_2) \vee P(h(x_1)))$ — дизъюнкт,

$D' = \neg R(g(c'), c'') \vee P(h(g(c')))) = D\{x_1/g(c'), x_2/c''\}$ — основной пример.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Система дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ противоречива



для каждой ***H-интерпретации*** I в S найдется такой дизъюнкт $D_i = (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})$ и такой набор основных термов $t_1, \dots, t_m$, для которых имеют место

$$I \not\models (L_{1i} \vee L_{2i} \vee \dots \vee L_{k_i i})[t_1, \dots, t_m]$$



для каждой ***H-интерпретации*** I существует основной пример $D' = D_i\{x_1/t_1, \dots, x_m/t_m\}$ дизъюнкта из системы S , для которого

$$I \not\models D'.$$

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Рассмотрим множество основных примеров дизъюнктов

$$\mathcal{G}_S = \{D' : D' \text{ — основной пример дизъюнкта из } S, \\ \text{существует эрбрановская интерпретация } I \subseteq B_H : \\ I \not\models D'\}.$$

Тогда система дизъюнктов S противоречива



система основных примеров $\mathcal{G}_S$ противоречива.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Вспомним теорему компактности Мальцева

Множество замкнутых формул T имеет модель тогда и только тогда, когда каждое **конечное** подмножество T' , $T' \subseteq T$, имеет модель.

Таким образом, множество основных примеров дизъюнктов $\mathcal{G}_S$ противоречиво



существует **конечное** противоречивое подмножество $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}_S$.

И в результате проведенных рассуждений мы приходим к
Теореме Эрбрана

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Теорема Эрбрана

Система дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_N\}$ противоречива



существует конечное противоречивое множество $\mathcal{G}'$
основных примеров дизъюнктов системы S .

В чем состоит главная особенность теоремы Эрбрана?

Основной пример дизъюнкта не содержит **предметных переменных**, и поэтому является простой **булевой формулой**

Таким образом проблема общезначимости формул логики предикатов (сложная проблема!!!) сводится к проблеме выполнимости булевой формулы (простой проблеме??!!).

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Маленькое лукавство.

Увы, теорема Эрбрана не сообщает нам ничего о том, КАКИЕ основные примеры дизъюнктов образуют это противоречивое множество $\mathcal{G}'$.

Нам нужно придумать механизм поиска этого противоречивого множества $\mathcal{G}'$.

Дэвис и Патнем предложили использовать компьютер для перебора всех эрбрановских интерпретаций в поиске противоречивой системы основных примеров дизъюнктов. Но Дж. Робинсон поступил хитрее...

Из дизъюнктов системы S нужно устранять потенциальные противоречия, пока не будут устранены все источники противоречия или не будет получено неустранимое (явное) противоречие.

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Если в системе S содержатся дизъюнкты $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$, то, очевидно, S противоречива (явное противоречие).

А если в S есть дизъюнкты $D_1 = D'_1 \vee L$ и $D_2 = D'_2 \vee \neg L$, то $I \models D_1$ и $I \models D_2$ влечет $I \models D'_1 \vee D'_2$. Значит, добавление дизъюнкта $D_0 = D'_1 \vee D'_2$ к S не нарушает ее выполнимости. Зато устраняется потенциальное противоречие L и $\neg L$.

Правило вывода, разрешающее противоречия,

$$\frac{D'_1 \vee L, D'_2 \vee \neg L}{D'_1 \vee D'_2}$$

называется **правилом резолюции**. Это правило можно применять до тех пор, пока не возникнет неустранимое противоречие $D_1 = L$ и $D_2 = \neg L$. Это и будет служить признаком противоречивости системы S .

ТЕОРЕМА ЭРБРАНА

Ну, а если $D_1 = P(x)$ и $D_2 = \neg P(f(y))$, то как быть тогда?
Ведь здесь нет явного противоречия.

Противоречие здесь скрытое. Дизъюнкты D_1 и D_2 имеют основные примеры

$$P(f(c)) = D_1\{x/f(c)\} \text{ и } \neg P(f(c)) = D_2\{y/c\},$$

которые образуют противоречие. Значит, D_1 и D_2 тоже противоречивы. Но как отыскать это скрытое противоречие?

Нужно постараться привести литеры $P(x)$ и $P(f(y))$ к общему виду. Приведение выражений к общему виду называется **унификацией**.

Нам нужен алгоритм унификации!

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Приведение двух атомов A' и A'' к общему виду достигается применением такой подстановки θ , для которой $A'\theta = A''\theta$.
Значит, для решения задачи унификации придется изучить алгебраические свойства подстановок.

Воспоминания

Подстановка — это отображение $\theta : Var \rightarrow Term$.

Конечная подстановка $\theta = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n\}$.

$E\theta$ — **применение подстановки** θ к выражению E .

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Композиция подстановок

Пусть $\theta, \eta \in \text{Subst}$. **Композиция подстановок** $\theta\eta$ — это подстановка μ , которая определяется следующим соотношением:

$$\mu(x) = (x\theta)\eta \text{ для любой } x \in \text{Var}.$$

Утверждение

Пусть $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$, $\eta = \{y_1/s_1, \dots, y_m/s_m\}$. Тогда подстановка

$$\begin{aligned} \mu = & \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i : y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} - \\ & \{x_j/t_j\eta : x_j = t_j\eta\}. \end{aligned}$$

является композицией $\theta\eta$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Доказательство

$$\begin{aligned}\mu = & \{x_1/t_1\eta, \dots, x_n/t_n\eta\} \cup \\ & \{y_i/s_i : y_i \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\} - \\ & \{x_j/t_j\eta : x_j = t_j\eta\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную $z \in Var$. Возможны 3 варианта.

1. $z = x_j \in Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (x_j\theta)\eta = t_j\eta$.

Если $t_j\eta \neq x_j$, то $x_j \in Dom_\mu$, и $x_j\mu = t_j\eta$.

Если $t_j\eta = x_j$, то $x_j \notin Dom_\mu$, и $x_j\mu = x_j$.

В любом случае $x_i(\theta\eta) = x_i\mu$.

2. $z = y_i \in Dom_\eta \setminus Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = (y_i\theta)\eta = y_i\eta = s_i$,
и $z\mu = s_i$.

3. $z = y_i \notin Dom_\eta \cup Dom_\theta$. Тогда $z(\theta\eta) = z$ и $z\mu = z$.



ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\},$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}.$$

$$\theta\eta =$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\},$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}.$$

$$\theta\eta =$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\},$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}.$$

$$\theta\eta = \{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\},$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}.$$

$$\begin{aligned}\theta\eta = & \{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\ & \{x/f(g(y), c), y/g(c), \textcolor{red}{z}/\textcolor{red}{z}, u/c\}\end{aligned}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$\theta = \{x/f(x, c), y/g(u), z/y\},$$

$$\eta = \{x/g(y), y/z, u/c\}.$$

$$\begin{aligned}\theta\eta &= \{x/f(x, c)\eta, y/g(u)\eta, z/y\eta\} \cup \{u/c\} \\ &\quad \{x/f(g(y), c), y/g(c), \textcolor{red}{z}/\textcolor{red}{z}, u/c\} \\ &\quad \{x/f(g(y), c), y/g(c), u/c\}\end{aligned}$$

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Определение

Пусть E_1 и E_2 — два логических выражения (термы, атомы, формулы и др.)

Подстановка θ называется **унификатором** выражений E_1 и E_2 , если $E_1\theta = E_2\theta$.

Подстановка θ называется **наиболее общим унификатором (НОУ)** выражений E_1 и E_2 , если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2 ;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ , для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

$НОУ(E_1, E_2)$ — множество наиболее общих унификаторов выражений E_1 и E_2 .

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$E_1 = P(f(x_1), x_2)$$

$$E_2 = P(y_1, c)$$

$\eta = \{x_1/f(c), x_2/c, y_1/f(f(c))\}$ — унификатор E_1 и E_2 , т.к.

$$E_1\eta = P(f(f(c)), c) = E_2\eta.$$

$\theta = \{x_2/c, y_1/f(x_1)\}$ — наиболее общий унификатор E_1 и E_2 , т.к.

$$\begin{aligned} E_1\theta &= P(f(x_1), c) = E_2\theta, \\ \eta &= \theta\{x_1/f(c)\}. \end{aligned}$$

Выражения E_1 и E_2 **унифицируемы**, и $\theta \in \text{НОУ}(E_1, E_2)$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Пример

$$E_1 = R(f(x_1), x_1)$$

$$E_2 = R(y_1, f(y_1))$$

Выражения E_1 и E_2 не имеют унификаторов, и
 $НОУ(E_1, E_2) = \emptyset$.

ЗАДАЧА УНИФИКАЦИИ

Задача унификации

состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить, являются ли эти выражения унифицируемыми, и, в случае их унифицируемости, вычислить наиболее общий унификатор.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 7.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 8.

Алгоритм унификации.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Подстановка θ называется **наиболее общим унификатором (НОУ)** выражений E_1 и E_2 , если

1. θ — унификатор выражений E_1 и E_2 , т. е. $E_1\theta = E_2\theta$;
2. для любого унификатора η выражений E_1 и E_2 существует такая подстановка ρ , для которой верно равенство

$$\eta = \theta\rho$$

Задача унификации

состоит в том, чтобы для двух выражений E_1 и E_2 выяснить, являются ли эти выражения унифицируемыми, и, в случае их унифицируемости, вычислить наиболее общий унификатор E_1 и E_2 .

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Начнем с самого простого варианта задачи унификации.

Как найти НОУ выражений E_1 и E_2 , если одно из этих выражений — переменная, т. е. $E_1 = x \in Var$?

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in НОУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $НОУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

1. Случай $x \notin Var_t$.

- ▶ $\theta = \{x/t\}$ — унификатор выражений x и t .

Действительно, $x\theta = t$ и $t\theta = t$ (т. к. $x \notin Var_t$).

- ▶ Каков бы ни был унификатор η выражений x и t , верно

$$\eta = \{x/t\}\eta.$$

Возьмем произвольную переменную y , $y \in Var$.

Если $y = x$, то $x\{x/t\}\eta = t\eta = x\eta$. (почему?) А если

$y \neq x$, то $y\{x/t\}\eta = y\eta$.

Таким образом, для любой переменной y верно

$y\{x/t\}\eta = y\eta$, т. е. $\{x/t\}\eta = \eta$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Лемма (о связке)

Пусть $x \in Var$, $t \in Term$. Тогда

1. Если $x \notin Var_t$, то $\{x/t\} \in HOУ(x, t)$;
2. Если $x \in Var_t$ и $x \neq t$, то $HOУ(x, t) = \emptyset$.

Доказательство.

2. Случай $x \in Var_t$.

Для любой подстановки θ длина терма $x\theta$ превосходит длину терма $t(x)\theta$.

Поэтому $x\theta \neq t\theta$ для любой подстановки θ , т. е. $HOУ(x, t) = \emptyset$.



АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Пусть $E_1 = P(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $E_2 = P(s_1, s_2, \dots, s_n)$.

Для решения задачи унификации сопоставим паре атомов E_1, E_2 систему уравнений

$$\mathcal{E}(E_1, E_2) : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

и будем решать задачу унификации для систем уравнений.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Определение

Подстановка θ называется **унификатором системы уравнений $\mathcal{E}$**

$$\mathcal{E} : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ t_2 = s_2 \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases}$$

если для любого i , $1 \leq i \leq n$, термы $t_i\theta$ и $s_i\theta$ одинаковы.

Фактически, унификатор $\theta = \{x_1/r_1, \dots, x_k/r_k\}$ — это решение системы уравнений $\mathcal{E}$ в свободной алгебре термов (эрбрановской интерпретации).

Соответствующим образом определяется и **наиболее общий унификатор системы уравнений** (определение дать самостоятельно).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, \textcolor{red}{y}) = f(y, \textcolor{red}{g}(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1 \theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1 \theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Наиболее общим унификатором системы уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, x) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \mathcal{E}_1 \theta : \begin{cases} f(c, g(c)) = f(c, g(c)) \\ g(c) = g(c) \end{cases}$$

является подстановка $\theta = \{x/g(c), y/c, z/g(c)\}$.

А система уравнений

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(c, y) = f(y, g(y)) \\ g(y) = z \end{cases} \quad \text{Почему?}$$

не имеет решений (неунифицируема).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Определение

Система уравнений $\mathcal{E}$ называется **приведенной**, если

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

и при этом

- ▶ $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq Var$,
- ▶ все переменные $x_1, \dots, x_n$ попарно различные,
- ▶ $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \bigcup_{i=1}^n Var_{s_i} = \emptyset$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример

Система уравнений $\mathcal{E}_1$ является приведенной, а $\mathcal{E}_2$ — нет.

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(c) \end{cases} \quad \mathcal{E}_2 : \begin{cases} \textcolor{red}{x} = f(y, g(y)) \\ z = w \\ u = g(\textcolor{red}{x}) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Простой случай.

Лемма (о приведенной системе)

Если система уравнений $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ \dots \\ x_n = s_n \end{cases}$$

является приведенной, то подстановка $\{x_1/s_1, x_2/s_2, \dots, x_n/s_n\}$ является наиболее общим унификатором системы $\mathcal{E}$.

Доказательство

Самостоятельно. С использованием леммы о связке.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Общий случай.

Найти унификатор — это значит решить систему уравнений. Решать систему будем методом исключения переменных (как в «обычной» алгебре). Исключив все переменные, получим решение (приведенную систему). Важно, чтобы все системы уравнений, которые мы будем строить в процессе «исключения переменных» были равносильны исходной системе.

Определение

Системы уравнений $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ называются **равносильными**, если $НОУ(\mathcal{E}_1) = НОУ(\mathcal{E}_2)$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Описание алгоритма унификации (Алгоритм Мартелли–Монтанари).

Это — недетерминированный алгоритм, состоящий из 6 правил, которые можно применять в любом порядке до тех пор, пока

- ▶ либо ни одно из правил применить невозможно (построена приведенная система уравнений),
- ▶ либо применяется правило, устанавливающее невозможность унификации.

Исходная система $\mathcal{E}_0$; $i = 0$;

```
while применимо одно из 6 правил do  
    выбрать правило  $R$ , применимое к  $E_i$ ;  
     $\mathcal{E}_{i++} = R(\mathcal{E}_i)$   
od
```


АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

- (1) уравнение $f(t'_1, t'_2, \dots, t'_k) = f(s'_1, s'_2, \dots, s'_k)$ замещается совокупностью уравнений $t'_1 = s'_1, t'_2 = s'_2, \dots, t'_k = s'_k$;
- (2) если в системе есть уравнение $f(t'_1, \dots, t'_k) = g(s'_1, \dots, s'_m)$, где $f, g \in Func \cup Const, f \neq g$, то система уравнений не имеет решений: **СТОП: "Нет унификатора"**;
- (3) уравнение $s = x$, где $x \in Var, s \notin Var$, замещается уравнением $x = s$;
- (4) уравнение $s = s$ удаляется из системы;

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Правила преобразования решения уравнений.

(5) если в системе есть уравнение $x = s$, причем

- ▶ $x \in Var$,
- ▶ $x \notin Var_s$, и
- ▶ переменная x **встречается в каких-либо других уравнениях системы**,

то ко всем **другим** уравнения системы применяется подстановка $\{x/s\}$;

(6) если в системе есть уравнение $x = s$, причем $x \neq s$, $x \in Var_s$, то система уравнений не имеет решений:
СТОП: "Нет унификатора".

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \left\{ \begin{array}{l} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{array} \right. \xRightarrow{(1)}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} f(x, c) = y \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ y = f(z, z) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ \textcolor{red}{f(x, c) = f(z, z)} \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ \textcolor{green}{x = z} \\ \textcolor{green}{c = z} \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ \textcolor{red}{x = z} \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ f(x, c) = f(z, z) \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} y = f(x, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(x, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ c = z \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ z = c \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ \textcolor{red}{z} = \textcolor{red}{c} \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ \textcolor{red}{z} = \textcolor{red}{c} \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} \textcolor{green}{y} = \textcolor{green}{f}(\textcolor{green}{c}, \textcolor{green}{c}) \\ \textcolor{green}{x} = \textcolor{green}{c} \\ \textcolor{green}{z} = \textcolor{green}{c} \\ \textcolor{green}{f}(u, v) = \textcolor{green}{f}(\textcolor{green}{c}, \textcolor{green}{c}) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ \textcolor{red}{z = c} \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} \textcolor{green}{y = f(c, c)} \\ \textcolor{green}{x = c} \\ \textcolor{green}{z = c} \\ \textcolor{green}{f(u, v) = f(c, c)} \end{cases}$$
$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ \textcolor{red}{f(u, v) = f(c, c)} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ \textcolor{red}{z = c} \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ \textcolor{green}{x = c} \\ z = c \\ \textcolor{green}{f(u, v) = f(c, c)} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ \textcolor{red}{f(u, v) = f(c, c)} \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ \textcolor{green}{u = c} \\ \textcolor{green}{v = c} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} y = f(z, c) \\ x = z \\ \textcolor{red}{z = c} \\ f(u, v) = f(z, c) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = \textcolor{green}{f(c, c)} \\ \textcolor{green}{x = c} \\ z = c \\ \textcolor{green}{f(u, v) = f(c, c)} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ \textcolor{red}{f(u, v) = f(c, c)} \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ \textcolor{green}{u = c} \\ \textcolor{green}{v = c} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases} \quad \text{— приведенная система}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 1.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} f(f(x, c), y) = f(y, f(z, z)) \\ f(u, v) = y \end{cases} \xRightarrow{(1,3,5)} \mathcal{E}_8 : \begin{cases} y = f(c, c) \\ x = c \\ z = c \\ u = c \\ v = c \end{cases}$$

$$\theta = \{x/c, y/f(c, c), z/c, u/c, v/c\} \in HOY(\mathcal{E}_0)$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_1 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_2 : \begin{cases} u = y \\ g(x) = v \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xRightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_3 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, v) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_4 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ f(y, g(x)) = f(x, y) \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_5 : \begin{cases} u = y \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = y \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \xRightarrow{(6)} \text{СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Пример 2.

$$\mathcal{E}_6 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ g(x) = x \end{cases} \xRightarrow{(3)} \mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_7 : \begin{cases} u = x \\ v = g(x) \\ y = x \\ x = g(x) \end{cases} \xRightarrow{(6)} \text{СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА.}$$

Система уравнений

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(u) = g(y) \\ g(x) = v \\ f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

не имеет решения (унификатора).

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Теорема (об унификации)

Какова бы ни была система уравнений $\mathcal{E}$,

1. алгоритм унификации Мартелли-Монтанари всегда завершает работу;
2. если система уравнений $\mathcal{E}$ **унифицируема**, то в результате работы алгоритма унификации будет построена приведенная система уравнений, равносильная исходной системе $\mathcal{E}$;
3. если система уравнений $\mathcal{E}$ **неунифицируема**, то в результате работы алгоритма унификации будет выдано сообщение **СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА**.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Уравнение $x = t$, где $x \in Var$, $x \notin Var_t$, будем называть **приведенным уравнением системы $\mathcal{E}$** , если переменная x не содержится ни в каких других уравнениях системы $\mathcal{E}$.

Переменную x в этом случае будем называть **приведенной переменной системы $\mathcal{E}$**

Каждой системе уравнений $\mathcal{E}$ сопоставим **характеристику** $H(\mathcal{E}) = \langle h_1(\mathcal{E}), h_2(\mathcal{E}), h_3(\mathcal{E}) \rangle$, — упорядоченную тройку натуральных чисел, в которой

1. $h_1(\mathcal{E})$ — общее число **неприведенных** переменных, содержащихся в системе $\mathcal{E}$;
2. $h_2(\mathcal{E})$ — общее число функц. символов и констант, содержащихся в **левых частях** уравнений системы $\mathcal{E}$;
3. $h_3(\mathcal{E})$ — общее число уравнений в системе $\mathcal{E}$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

На множестве упорядоченных троек натуральных чисел введем отношение **лексикографического порядка** :

$$\begin{aligned} \langle M_1, M_2, M_3 \rangle &\succ \langle N_1, N_2, N_3 \rangle \\ &\Downarrow \\ N_1 &< M_1 \\ \text{или } N_1 &= M_1 \text{ и } N_2 < M_2 \\ \text{или } N_1 &= M_1, N_2 = M_2 \text{ и } N_3 < M_3. \end{aligned}$$

Пример.

$$\langle 2, 11, 2 \rangle \succ \langle 2, 10, 5578 \rangle \succ \langle 1, 1001, 78 \rangle$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Вспомогательная лемма.

В множестве троек натуральных чисел не существует бесконечно убывающей последовательности

$$\langle k_1, m_1, n_1 \rangle \succ \langle k_2, m_2, n_2 \rangle \succ \dots \succ \langle k_i, m_i, n_i \rangle \succ \langle k_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1} \rangle \succ \dots$$

Доказательство вспомогательной леммы.

Самостоятельно.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Идея доказательства вспомогательной леммы.

Предположим, что у Вас есть 1 000 000 руб. в произвольных купюрах. Сыграем в игру. Правила игры таковы.

1. Вы даете мне денежную купюру и взамен получаете право потребовать от меня любую сумму в купюрах меньшего достоинства.
2. Если Вы вручаете мне купюру наименьшего достоинства, то взамен не получаете ничего.

Докажите, что игра всегда будет оканчиваться тем, что Вы остаетесь без денег.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \quad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \quad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (1)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n) \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(1)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \\ t_1 = s_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \preceq h_1(\mathcal{E}''), \quad h_2(\mathcal{E}') \succ h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \quad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (3)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ s = x \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(3)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ x = s \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succ h_1(\mathcal{E}''), \quad h_2(\mathcal{E}') \succ h_2(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \quad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (4)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} \dots \\ \textcolor{red}{s} = \textcolor{red}{s} \\ \dots \end{cases} \xrightarrow{(4)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} \dots \\ \textcolor{green}{\dots} \\ \dots \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succeq h_1(\mathcal{E}''), \quad h_2(\mathcal{E}') \succeq h_2(\mathcal{E}''), \quad h_3(\mathcal{E}') \succ h_3(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) характеристика системы уравнений убывает, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow H(\mathcal{E}') \succ H(\mathcal{E}''), \quad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Правило (5)

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

$$h_1(\mathcal{E}') \succ h_1(\mathcal{E}'')$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 1. Завершаемость алгоритма.

Значит, правила (1), (3, (4), (5) не могут применяться бесконечно долго.

Значит, рано или поздно либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило. В любом случае работа алгоритма унификации завершится.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Покажем, что в результате применения правил (1), (3), (4), (5) получается система уравнений, равносильная исходной, т. е.

$$\mathcal{E}' \xrightarrow{(i)} \mathcal{E}'' \Rightarrow \mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'', \quad \text{где } i = 1, 3, 4, 5.$$

Это, очевидно, верно для правил (1), (3), (4) (убедитесь сами).

Покажем, что правило (5) также приводит к равносильной системе.

$$\mathcal{E}' : \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n = s_n \end{cases} \xrightarrow{(5)} \mathcal{E}'' : \begin{cases} t_1\{x/s_j\} = s_1\{x/s_j\} \\ \dots \\ x = s_j \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\} = s_n\{x/s_j\} \end{cases}$$

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 2. Корректность алгоритма.

Предположим, что θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}'$, т. е.

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1\theta \equiv s_1\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\theta \equiv s_n\theta \end{array} \right.$$

Т. к. $x\theta \equiv s_j\theta$, $x \notin \text{Var}_{s_j}$, согласно лемме о связке $\theta = \{x/s_j\}\theta$.

Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1\{x/s_j\}\theta \equiv s_1\{x/s_j\}\theta \\ \dots \\ x\theta \equiv s_j\theta \\ \dots \\ t_n\{x/s_j\}\theta \equiv s_n\{x/s_j\}\theta \end{array} \right.$$

Значит, θ — унификатор системы уравнений $\mathcal{E}''$. Аналогично доказывается, что всякий унификатор системы $\mathcal{E}''$ является унификатором системы $\mathcal{E}'$.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Как мы показали, рано или поздно при работе алгоритма либо будет применено одно из правил (2), (6), либо будет получена система, к которой неприменимо ни одно правило.

Если к системе применяется правило (2), то в системе есть уравнение $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m)$, $f \neq g$. Очевидно, для любой подстановки θ верно $f(s_1, \dots, s_n)\theta \neq g(t_1, \dots, t_m)\theta$.

Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Если к системе применяется правило (6), то в системе есть уравнение $x = s$, $x \in \text{Var}_s$. Согласно [лемме о связке](#) для любой подстановки θ верно $x\theta \neq s\theta$. Значит, система, содержащая такое уравнение, неунифицируема.

Значит, выдача сообщения **СТОП: НЕТ УНИФИКАТОРА** означает, что система неунифицируема.

АЛГОРИТМ УНИФИКАЦИИ

Доказательство. 3. Полнота алгоритма унификации.

Если к системе уравнений неприменимо ни одно правило, то

- ▶ в левых частях уравнений содержатся только переменные (иначе применимы правила (1), (2) или (3));
- ▶ ни одна переменная из левой части больше нигде не содержится (иначе применимы правила (4), (5) или (6)).

Значит, построенная система уравнений является приведенной и имеет унификатор, который вычисляется по [лемме о приведенной системе](#) . □

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 8.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 9.

Резолютивный вывод.
Корректность резолютивного
вывода.
Применение метода резолюций.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

О терминологии.

Пусть задано выражение E и подстановка θ .

Подстановка $\theta : \mathbf{Var} \rightarrow \mathbf{Var}$ называется **переименованием**, если θ — биекция.

Выражение $E\theta$ называется **примером** выражения E .

Если $Var_{E\theta} = \emptyset$, то пример $E\theta$ называется **основным примером** выражения E .

Если θ — переименование, то пример $E\theta$ называется **вариантом** выражения E .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример

Пусть $E = P(x, f(y)) \vee \neg R(y, c)$.

$\theta = \{x/u, y/z, u/x, z/y\}$ — переименование.

$E' = E\{x/g(d), y/z\} = P(g(d), f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — пример E .

$E'' = E\{x/g(d), y/c\} = P(g(d), f(c)) \vee \neg R(c, c)$ — основной пример E .

$E''' = E\{x/u, y/z\} = P(u, f(z)) \vee \neg R(z, c)$ — вариант E .

В частности, пустая (тождественная) подстановка является переименованием.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило резолюции.

Пусть $D_1 = D'_1 \vee L_1$ и $D_2 = D'_2 \vee \neg L_2$ — два дизъюнкта.

Пусть $\theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D'_1 \vee D'_2)\theta$ называется **резольвентой** дизъюнктов D_1 и D_2 .

Пара литер L_1 и $\neg L_2$ называется **контрарной парой**.

Правило резолюции

$$\frac{D'_1 \vee L_1, D'_2 \vee \neg L_2}{(D'_1 \vee D'_2)\theta}, \quad \theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = Q(x) \vee R(y, x) \vee \neg P(g(z, y), z)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

$$\text{НОУ}(P(x, f(y)), P(g(z, y), z))$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

$$\text{НОУ}\left(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)\right)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z, y) \\ f(y) = z \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

$$\text{НОУ}\left(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)\right)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z, y) \\ f(y) = z \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

$$\text{НОУ}\left(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)\right) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} x = g(z, y) \\ f(y) = z \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = g(f(y), y) \\ z = f(y) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y)) \vee \neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

$$\text{НОУ}(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \left(\underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1} \vee \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \right) \theta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee \underbrace{\neg R(g(x, z), f(z))}_{D'_1}$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x) \vee R(y, x)}_{D'_2} \vee \neg P(g(z, y), z)$$

Возможная контрарная пара $P(x, f(y)), \neg P(g(z, y), z)$

$$\text{НОУ}(P(x, f(y)), P(g(z, y), z)) = \theta = \{x/g(f(y), y), z/f(y)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \neg R(g(g(f(y), y), y), f(f(y))) \vee Q(g(f(y), y)) \vee R(y, g(f(y), y)).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$\text{НОУ}\left(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\right)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$\text{НОУ}\left(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\right)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x, z) = y \\ f(z) = x \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$\text{НОУ}\left(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\right)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x, z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = g(f(z), z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрастная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$\text{НОУ}\left(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\right) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} g(x, z) = y \\ f(z) = x \end{cases} \xrightarrow{(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = g(f(z), z) \\ x = f(z) \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee \neg R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$\text{НОУ}\left(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\right) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$$

Резольвента

$$D_0 = \left(\underbrace{P(x, f(y))}_{D''_1} \vee \underbrace{Q(x) \vee \neg P(g(z, y), z)}_{D''_2} \right) \eta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила резолюции.

$$D_1 = \underbrace{P(x, f(y))}_{D'_1} \vee \neg R(g(x, z), f(z))$$

$$D_2 = \underbrace{Q(x)}_{D'_2} \vee \neg R(y, x) \vee \underbrace{\neg P(g(z, y), z)}_{D'_2}$$

Другая контрарная пара $\neg R(g(x, z), f(z)), R(y, x)$

$$\text{НОУ}\left(R(g(x, z), f(z)), R(y, x)\right) = \eta = \{x/f(z), y/g(f(z), z)\}$$

Резольвента

$$D_0 = P(f(z), f(g(f(z), z))) \vee Q(f(z)) \vee \neg P(g(z, g(f(z), z)), z).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Правило склейки.

Пусть $D_1 = D'_1 \vee L_1 \vee L_2$ — дизъюнкт.

Пусть $\eta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$.

Тогда дизъюнкт $D_0 = (D'_1 \vee L_1)\eta$ называется **склейкой** дизъюнкта D_1 .

Пара литер L_1 и L_2 называется **склеиваемой парой**.

Правило склейки

$$\frac{D'_1 \vee L_1 \vee L_2}{(D'_1 \vee L_1)\eta}, \quad \eta \in \text{НОУ}(L_1, L_2)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = P(x) \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x))$, $\neg R(x, f(c), z)$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z)$

$$НОУ(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z))$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z)$

$$НОУ(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z))$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z)$

$$\text{НОУ}\left(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\right)$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \xrightarrow{(1),(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x)), \neg R(x, f(c), z)$

$$НОУ(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

$$\mathcal{E}_0 : \begin{cases} y = x \\ z = f(c) \\ f(x) = z \end{cases} \xrightarrow{(1),(3),(5)} \mathcal{E}_1 : \begin{cases} y = c \\ z = f(c) \\ x = c \end{cases}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x))$, $\neg R(x, f(c), z)$

$$\text{НОУ}\left(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\right) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

Склейка

$$D_0 = \left(\underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x))\right)\eta$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример применения правила склейки.

$$D_1 = \underbrace{P(x)}_{D'_1} \vee \neg R(y, z, f(x)) \vee \neg R(x, f(c), z)$$

Возможная склеиваемая пара $\neg R(y, z, f(x))$, $\neg R(x, f(c), z)$

$$\text{НОУ}\left(R(y, z, f(x)), R(x, f(c), z)\right) = \eta = \{x/c, y/c, z/f(c)\}$$

Склейка

$$D_0 = P(c) \vee R(c, f(c), f(c)).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Определение резолютивного вывода.

Пусть $S = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ — система дизъюнктов.

Резолютивным выводом из системы дизъюнктов S называется конечная последовательность дизъюнктов

$$D'_1, D'_2, \dots, D'_i, D'_{i+1}, \dots, D'_n,$$

в которой для любого i , $1 \leq i \leq n$, выполняется одно из трех условий:

1. либо D'_i — вариант некоторого дизъюнкта из S ;
2. либо D'_i — резольвента дизъюнктов D'_j и D'_k , где $j, k < i$;
3. либо D'_i — склейка дизъюнкта D'_j , где $j < i$.

Дизъюнкты $D'_1, D'_2, \dots, D'_n$ считаются **резолютивно выводимыми** из системы S .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример резолютивного вывода.

$$S = \{D_1, D_2, D_3\}$$

$$D_1 = P(x, f(y)) \vee R(y),$$

$$D_2 = \neg R(y),$$

$$D_3 = \neg P(f(x), z) \vee \neg P(y, y).$$

Резолютивный вывод из S

1. $D'_1 = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$, вариант дизъюнкта D_1
2. $D'_2 = \neg R(y_2)$, вариант дизъюнкта D_2
3. $D'_3 = P(x_3, f(y_3))$, резольвента дизъюнктов D'_1, D'_2
4. $D'_4 = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$, вариант дизъюнкта D_3
5. $D'_5 = \neg P(f(x_5), f(x_5))$, склейка D'_4
6. $D'_6 = \square$, резольвента дизъюнктов D'_3 и D'_5

Здесь $\square$ — **пустой дизъюнкт**, тождественная ложь.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Пример резолютивного вывода.

А почему пустой дизъюнкт $\square$ — это тождественная ложь?

А потому, что каждый дизъюнкт $D = L_1 \vee \dots \vee L_n$ равносителен утверждению $L_1 \vee \dots \vee L_n \vee \mathbf{false}$.

Поэтому резольвентой дизъюнктов $D_1 = L \vee \mathbf{false}$ и $D_2 = \neg L \vee \mathbf{false}$ будет дизъюнкт $D_0 = \mathbf{false}$.

Этот дизъюнкт не содержит ни одной литеры, и поэтому называется **пустым дизъюнктом**.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Обратите внимание на то, что я постоянно переименовываю переменные так, чтобы каждый дизъюнкт резолютивного вывода содержал свою индивидуальную систему переменных!

Резолютивный вывод из S

1. $D'_1 = P(x_1, f(y_1)) \vee R(y_1)$
2. $D'_2 = \neg R(y_2)$
3. $D'_3 = P(x_3, f(y_3))$
4. $D'_4 = \neg P(f(x_4), z_4) \vee \neg P(y_4, y_4)$
5. $D'_5 = \neg P(f(x_5), f(x_5))$
6. $D'_6 = \square$

Зачем это нужно?

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Все дело в том, что все переменные дизъюнктов связаны кванторами $\forall$, и поэтому их имена можно достаточно произвольно изменять, полностью сохраняя смысл формул. Однако, случайное совпадение имен переменных (коллизия) может привести к тому, что резольвенту дизъюнктов построить не удастся.

Пусть $S = \{D_1 = P(x), D_2 = \neg P(f(x))\}$.

$$1. D'_1 = P(x)$$

$$2. D'_2 = \neg P(f(x))$$

$$3. \text{НОУ}(P(x), P(f(x))) = \emptyset,$$

и поэтому D'_1, D'_2

не имеют резольвенты.

$$1. D''_1 = P(x_1)$$

$$2. D''_2 = \neg P(f(x_2))$$

$$3. D''_3 = \square$$

резольвента D''_1, D''_2 .

Итак, наш девиз:

НОВЫЙ ДИЗЪЮНКТ — НОВЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД

Резолютивный вывод называется **успешным** (или, по другому, **резолютивным опровержением**), если этот вывод оканчивается пустым дизъюнктом $\square$.

В чем же состоит успех такого резолютивного вывода и что при этом опровергнуто?

Успешный вывод — это свидетельство того, что система дизъюнктов S **противоречива** и опровергнуто предположение о ее выполнимости!

Но это придется обосновать.

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема корректности резолютивного вывода

Если из системы дизъюнктов S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$, то S — противоречивая система дизъюнктов.

Доказательство теоремы

Пустой дизъюнкт тождественно ложен, т.е. не имеет моделей. Покажем, что каждый дизъюнкт, резолютивно выводимый из S , является логическим следствием S . Тогда

$$S \models \square,$$

и это означает, что S также не имеет моделей, т.е. является противоречивой системой.

Остается доказать две леммы.

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма 1.

Если D_0 — резольвента дизъюнктов D_1 и D_2 , то $D_1, D_2 \models D_0$

Доказательство леммы 1.

$$D_1 = D'_1 \vee L_1, \quad D_2 = D'_2 \vee \neg L_2, \quad \theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2), \quad D_0 = (D'_1 \vee D'_2)\theta$$

Таким образом, $L_1\theta = L_2\theta = L_0$.

Поэтому мы получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} D_1, D_2 &\models D_1\theta, & D_1, D_2 &\models D_2\theta \\ D_1, D_2 &\models D'_1\theta \vee L_1\theta, & D_1, D_2 &\models D'_2\theta \vee \neg L_2\theta \\ D_1, D_2 &\models D'_1\theta \vee L_0, & D_1, D_2 &\models D'_2\theta \vee \neg L_0 \\ D_1, D_2 &\models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee L_0, & D_1, D_2 &\models D'_1\theta \vee D'_2\theta \vee \neg L_0 \\ &D_1, D_2 &\models D'_1\theta \vee D'_2\theta \\ &D_1, D_2 &\models D_0 \end{aligned}$$

Вот и все. □

КОРРЕКТНОСТЬ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма 2.

Если D_0 — склейка дизъюнкта D , то $D \models D_0$.

Доказательство леммы 2.

Самостоятельно.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Пример.

Рассмотрим формулу φ

$$\forall x \left(\left(\forall y \exists v \forall u \left((A(u, v) \rightarrow B(y, u)) \& \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (\neg \exists w A(w, u) \rightarrow \forall z A(z, v)) \right) \rightarrow \exists y B(x, y) \right) \right)$$

Задача

Проверить, верно ли, что $\models \varphi$.

Решение

Методом резолюций.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 1. Покажем, что формула $\varphi_1 = \neg\varphi$ противоречивая.

$$\varphi_1 = \neg\forall x \left(\forall y\exists v\forall u \left((A(u, v) \rightarrow B(y, u)) \& \right. \right. \\ \left. \left. (\neg\exists wA(w, u) \rightarrow \forall zA(z, v)) \right) \rightarrow \exists yB(x, y) \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2 .

Исходная формула

$$\neg \forall x \left(\forall y \exists v \forall u \left((A(u, v) \rightarrow B(y, u)) \& \right. \right. \\ \left. \left. (\neg \exists w A(w, u) \rightarrow \forall z A(z, v)) \right) \rightarrow \exists y B(x, y) \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2 .

Переименование переменных

$$\neg \forall x \left(\forall y' \exists v \forall u \left((A(u, v) \rightarrow B(y', u)) \& \right. \right. \\ \left. \left. (\neg \exists w A(w, u) \rightarrow \forall z A(z, v)) \right) \rightarrow \exists y'' B(x, y'') \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2 .

Удаление импликаций

$$\neg \forall x \left(\neg \forall y' \exists v \forall u \left((\neg A(u, v) \vee B(y', u)) \& \right. \right. \\ \left. \left. (\neg \neg \exists w A(w, u) \vee \forall z A(z, v)) \right) \vee \exists y'' B(x, y'') \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2 .

Продвижение отрицаний

$$\exists x \left(\forall y' \exists v \forall u \left((\neg A(u, v) \vee B(y', u)) \& \right. \right. \\ \left. \left. (\exists w A(w, u) \vee \forall z A(z, v)) \right) \& \forall y'' \neg B(x, y'') \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 2. Приведем φ_1 к ПНФ φ_2 .

Вынесение кванторов

$$\varphi_2 = \exists x \forall y' \exists v \forall u \exists w \forall z \forall y'' \left(\begin{array}{l} (\neg A(u, v) \vee B(y', u)) \& \\ (A(w, u) \vee A(z, v)) \& \\ \neg B(x, y'') \end{array} \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 3. Приведем φ_2 к ССФ φ_3 .

$$\varphi_3 = \forall y' \forall u \forall z \forall y'' \left(\begin{aligned} &(\neg A(u, f(y')) \vee B(y', u)) \& \\ &(A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y'))) \& \\ &\neg B(c, y'') \end{aligned} \right)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 4. Формирование системы дизъюнктов S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1),$
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2)),$
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3)),$
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4))),$
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5),$
6. $D'_6 = \square .$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1)$, (вариант D_1)
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2))$,
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3))$,
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4)))$,
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5)$,
6. $D'_6 = \square$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1),$
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2)),$ (вариант D_2)
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3)),$
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4))),$
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5),$
6. $D'_6 = \square .$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1),$
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2)),$
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3)),$ (склейка D'_2)
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4))),$
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5),$
6. $D'_6 = \square .$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1),$
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2)),$
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3)),$
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4))),$ (резольвента D'_1 и D'_3)
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5),$
6. $D'_6 = \square .$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1),$
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2)),$
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3)),$
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4))),$
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5),$ (вариант D_3)
6. $D'_6 = \square .$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Этап 5. Резолютивный вывод из S_φ .

$$S_\varphi = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg A(u, f(y')) \vee B(y', u), \\ D_2 = A(g(y', u), u) \vee A(z, f(y')), \\ D_3 = \neg B(c, y'') \end{array} \right\}$$

1. $D'_1 = \neg A(u_1, f(y'_1)) \vee B(y'_1, u_1),$
2. $D'_2 = A(g(y'_2, u_2), u_2) \vee A(z_2, f(y'_2)),$
3. $D'_3 = A(g(y'_3, f(y'_3)), f(y'_3)),$
4. $D'_4 = B(y'_4, g(y'_4, f(y'_4))),$
5. $D'_5 = \neg B(c, y''_5),$
6. $D'_6 = \square .$ (резольвента D'_4 и D'_5)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение

Заключение. Успешный резолютивный вывод из S_φ означает, что S_φ — противоречивая система дизъюнктов.

Значит, $\varphi_1 = \neg\varphi$ — невыполнимая формула.

Значит, φ — общезначимая формула,

$$\models \varphi.$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вопрос полноты

А можно ли таким способом проверять общезначимость любых формул?

Этот вопрос может быть уточнен так:

1. Верно ли, что для любой общезначимой формулы φ можно построить успешный резолютивный вывод из соответствующей системы дизъюнктов S_φ ?
2. Верно ли, что в том случае, когда формулы φ необщезначима (система дизъюнктов S_φ выполнима), мы сможем каким-то образом обнаружить невозможность построения успешного резолютивного вывода?

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 9.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 10.

Полнота резольтивного вывода.
Применение метода резолюций.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема о полноте резолютивного вывода

Если S — противоречивая система дизъюнктов, то из S резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

Доказательство.

Если S — противоречивая система дизъюнктов, то согласно [теореме Эрбрана](#) существует конечная противоречивая система S' **основных** примеров дизъюнктов из S . Поэтому мы

1. Вначале покажем, что из противоречивой системы основных примеров дизъюнктов S' можно резолютивно вывести пустой дизъюнкт $\square$.
2. А затем на основе этого вывода построим резолютивный вывод пустого дизъюнкта из самой системы S .

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма об основных примерах дизъюнктов

Если S' — конечная противоречивая система основных примеров дизъюнктов, то из S' резолютивно выводим пустой дизъюнкт $\square$.

Доказательство леммы.

Индукцией по числу N различных основных атомов в системе дизъюнктов S' .

Базис ($N = 0$). Система S' противоречива. Значит, $S' \neq \emptyset$.

Но в S' нет ни одного атома. Значит, в S' содержится только пустой дизъюнкт $\square$. И он резолютивно выводим из S' .

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

Доказательство леммы.

Индуктивный переход ($N + 1 \rightarrow N$). Рассмотрим произвольный основной атом A_0 , входящий в состав дизъюнктов из S' , и разобьем систему S' на три части:

1. $S'_1 = \{D : D \in S', D = \hat{D}_1 \vee A_0\};$
2. $S'_2 = \{D : D \in S', D = \hat{D}_2 \vee \neg A_0\}.$
3. $S'_3 = \{D : D \in S', A_0 \notin D, \neg A_0 \notin D\};$

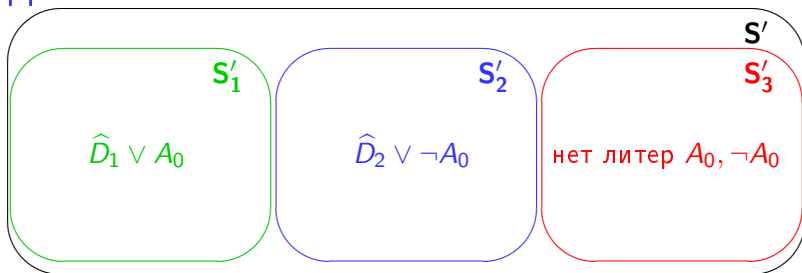
Построим все резольвенты по контрарной паре $A_0, \neg A_0$

$$S'_0 = \{\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2 : D_1 = \hat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1, D_2 = \hat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2\}$$

и покажем, что множество дизъюнктов $S'' = S'_0 \cup S'_3$ противоречиво.

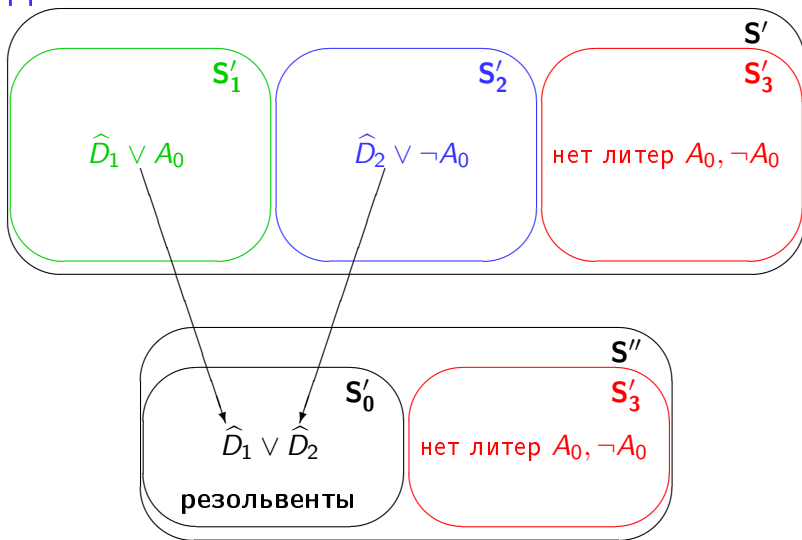
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

Доказательство леммы.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

Доказательство леммы.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию I .

Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).

Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. S' противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S'_1 = \{D : D \in S', D = \hat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S'_1$.

Значит, $I \not\models S'_2 \cup S'_3$.

Возможны два варианта.

Вариант 1. $I \not\models S'_3$.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Рассмотрим произвольную интерпретацию I .

Для определенности будем полагать, что $I \models A_0$
(если $I \models \neg A_0$, то рассуждения будут аналогичны).

Покажем, что $I \not\models S''$.

Т. к. S' противоречивая система, верно $I \not\models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$.

Т. к. $I \models A_0$ и $S'_1 = \{D : D \in S', D = \hat{D} \vee A_0\}$, верно $I \models S'_1$.

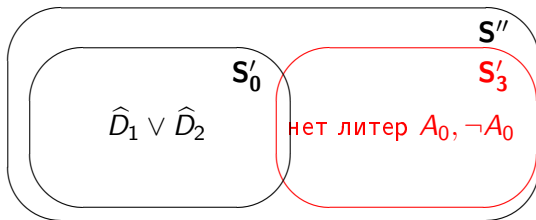
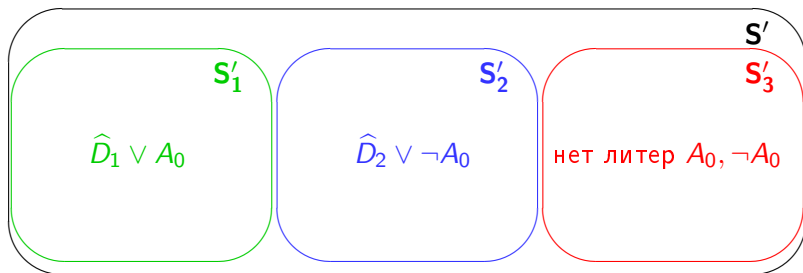
Значит, $I \not\models S'_2 \cup S'_3$.

Возможны два варианта.

Вариант 1. $I \not\models S'_3$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

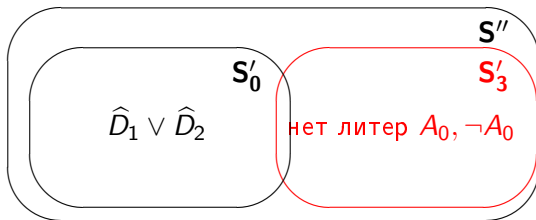
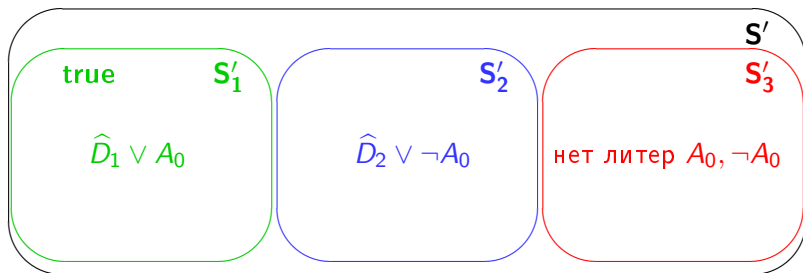
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$$I \models A_0$$



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

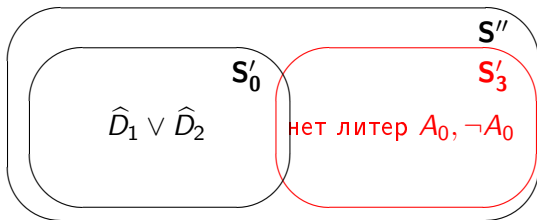
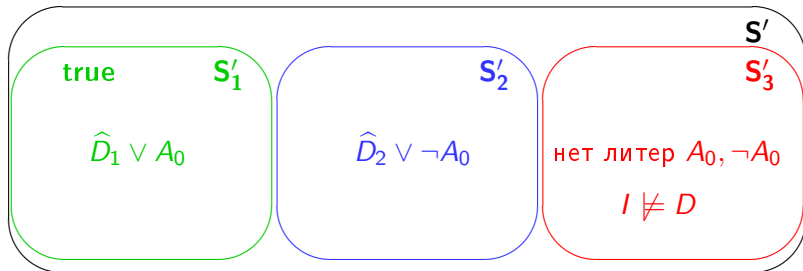
$$I \models A_0$$



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$I \models A_0$

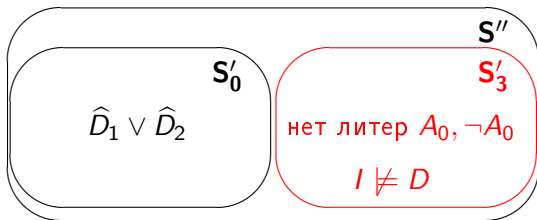
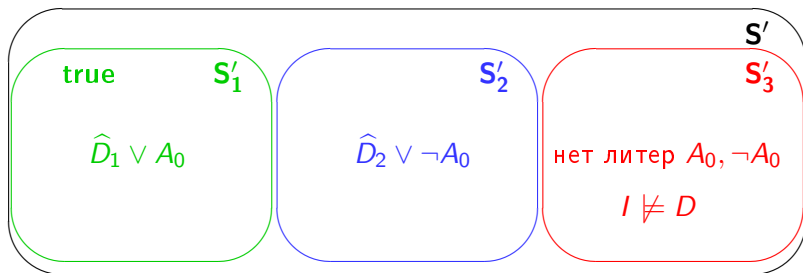
Вариант 1.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$I \models A_0$

Вариант 1.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2. $I \not\models S'_2$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\hat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$, что $I \not\models \hat{D}_2 \vee \neg A_0$. Следовательно, $I \not\models \hat{D}_2$ (почему?).

Рассмотрим теперь интерпретацию I' , которая отличается от I только тем, что $I' \models A_0$.

Т. к. $I' \models S'_1 \cup S'_2 \cup S'_3$ (ведь S' противоречивая),
 $I' \models S'_2$ (ведь $S'_2 = \{D : D \in S', D = \hat{D} \vee \neg A_0\}$ и $I' \models \neg A_0$),
 $I' \models S'_3$ (а иначе мы бы имели вариант 1, ведь $A_0 \notin S'_3$),

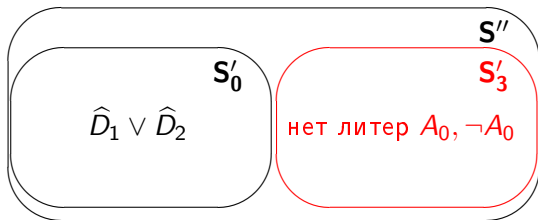
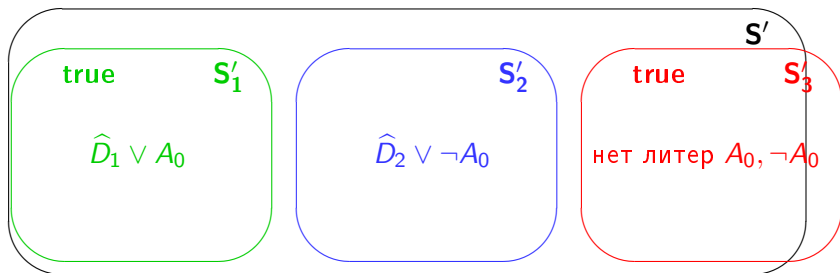
верно $I' \models S'_1$.

Значит, существует такой дизъюнкт $\hat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, что $I' \not\models \hat{D}_1 \vee A_0$. Следовательно, $I' \not\models \hat{D}_1$. А поскольку $A_0 \notin \hat{D}_1$, а I отличается от I' только оценкой атома A_0 , верно $I \not\models \hat{D}_1$.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$I \models A_0$

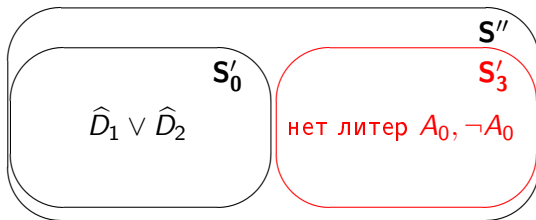
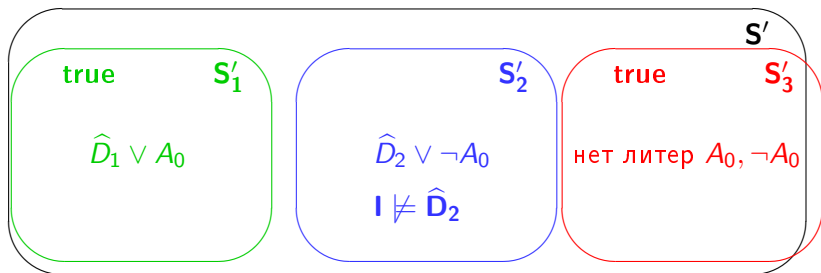
Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВИВОДА

$I \models A_0$

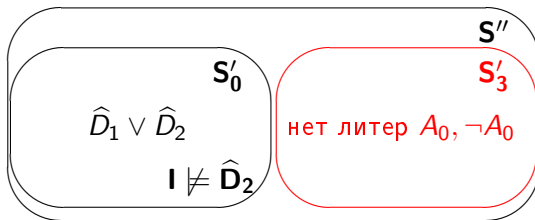
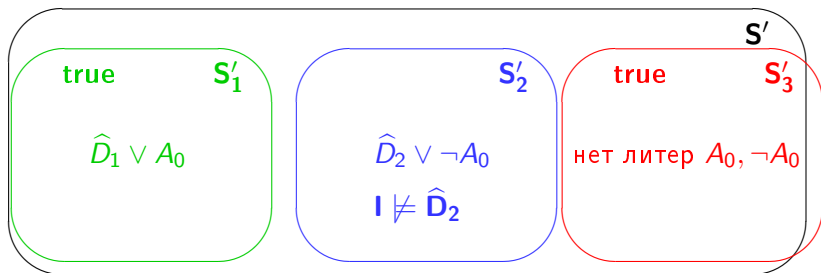
Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$I \models A_0$

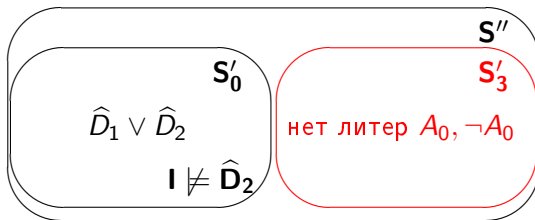
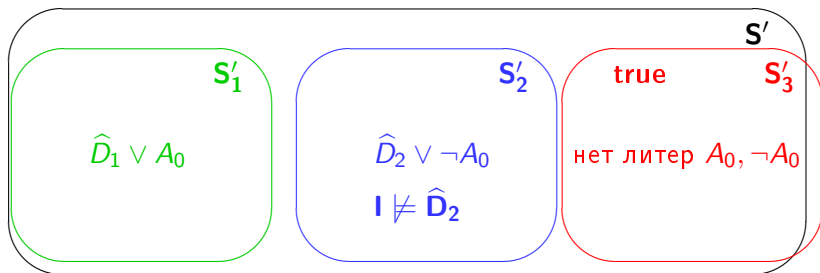
Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$I' \not\models A_0$

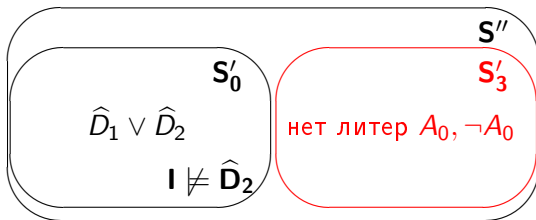
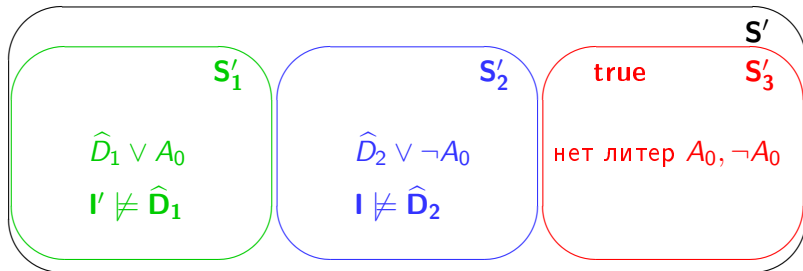
Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВИВОДА

$I' \not\models A_0$

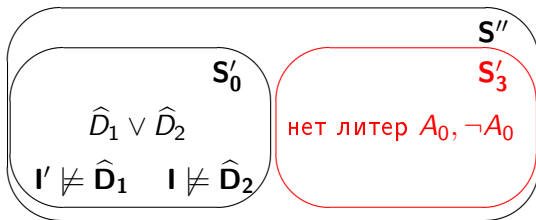
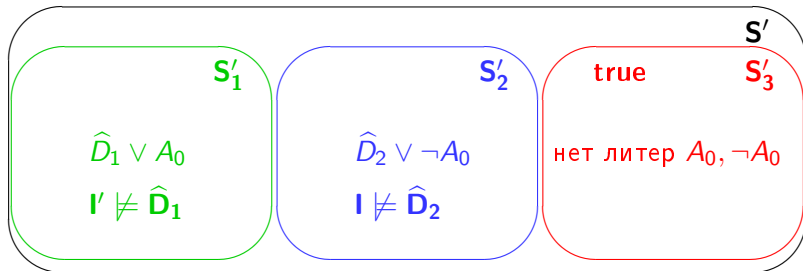
Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВИВОДА

$I' \not\models A_0$

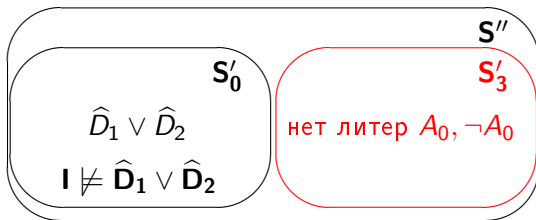
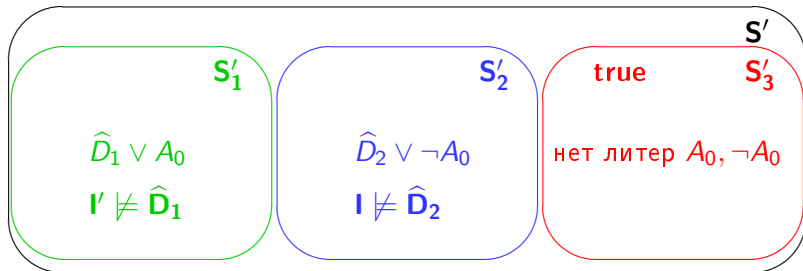
Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

$I' \not\models A_0$

Вариант 2.



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \hat{D}_1$ и $I \not\models \hat{D}_2$, верно $I \not\models \hat{D}_1 \vee \hat{D}_2$.

Остается заметить, что $\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\hat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\hat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2 \in S'_0$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \hat{D}_1$ и $I \not\models \hat{D}_2$, верно $I \not\models \hat{D}_1 \vee \hat{D}_2$.

Остается заметить, что $\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\hat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\hat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2 \in S'_0$

Следовательно, $I \not\models S'_0$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы.

Вариант 2.

Т.к. $I \not\models \hat{D}_1$ и $I \not\models \hat{D}_2$, верно $I \not\models \hat{D}_1 \vee \hat{D}_2$.

Остается заметить, что $\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2$ — это резольвента дизъюнктов $\hat{D}_2 \vee \neg A_0 \in S'_2$ и $\hat{D}_1 \vee A_0 \in S'_1$, и поэтому $\hat{D}_1 \vee \hat{D}_2 \in S'_0$

Следовательно, $I \not\models S'_0$. Тогда $I \not\models S''$, что и требовалось.

Итак, в обоих случаях $I \not\models S''$. Т. к. I — произвольная интерпретация, приходим к заключению о том, что система дизъюнктов $S'' = S'_0 \cup S'_3$

- ▶ противоречивая,
- ▶ получена из S' при помощи правила резолюции,
- ▶ не содержит атома A_0 .

Индуктивный переход завершен, и лемма доказана. □

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме

Пусть D_1 и D_1 — два дизъюнкта, и при этом $Var_{D_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$.

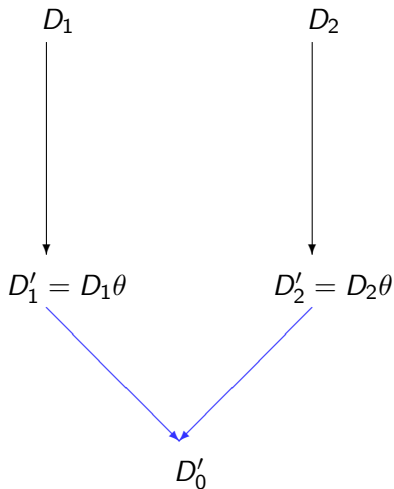
Пусть $D'_1 = D_1\theta$ и $D'_2 = D_2\theta$ — два основных примера этих дизъюнктов D_1 и D_1 .

Пусть D'_0 — резольвента дизъюнктов D'_1 и D'_2 .

Тогда из дизъюнктов D_1 и D_2 резольтивно выводим дизъюнкт D_0 , основным примером которой является дизъюнкт D'_0 .

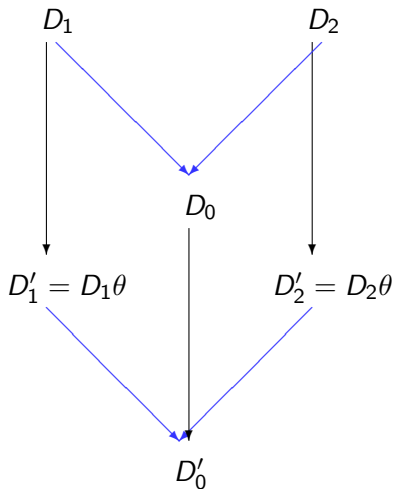
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме



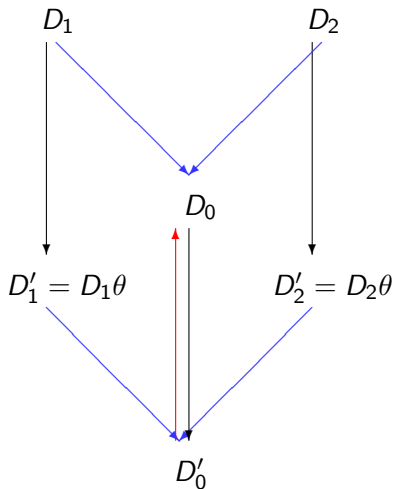
ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Лемма о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Пусть $L'_0, \neg L'_0$ — это контрарная пара литер, по которой была построена резольвента D'_0 дизъюнктов D'_1 и D'_2 .

$$D'_1 = \hat{D}'_1 \vee L'_0,$$

$$D'_2 = \hat{D}'_2 \vee \neg L'_0,$$

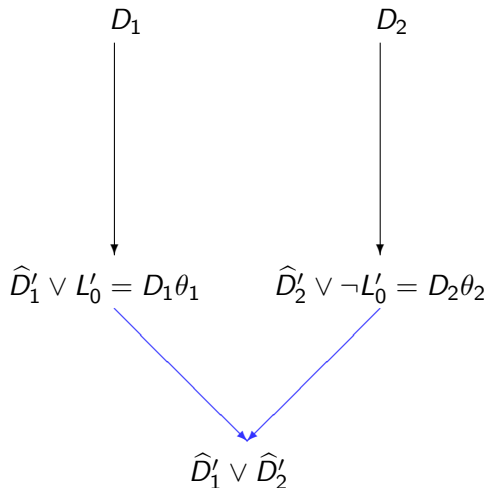
$$D'_0 = \hat{D}'_1 \vee \hat{D}'_2.$$

Поскольку $Var_{D_1} \cap Var_{D_2} = \emptyset$, подстановку θ можно разделить на две половины θ_1, θ_2 так, что

$$\theta = \theta_1 \cup \theta_2, \quad Dom_{\theta_1} \subseteq Var_{D_1}, \quad Dom_{\theta_2} \subseteq Var_{D_2}.$$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Поскольку $D'_1 = D_1\theta_1$, литера L'_0 является основным примером некоторых литер $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$, входящих в состав дизъюнкта D_1 , т.е.

$$L'_0 = L_{11}\theta = L_{11}\theta_1 = \dots = L_{1k_1}\theta_1.$$

Аналогично, литера $\neg L'_0$ является основным примером некоторых литер $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \dots, \neg L_{2k_2}$, входящих в состав дизъюнкта D_2 , т. е.

$$\neg L'_0 = \neg L_{21}\theta_2 = \neg L_{22}\theta_2 = \dots = \neg L_{2k_2}\theta_2.$$

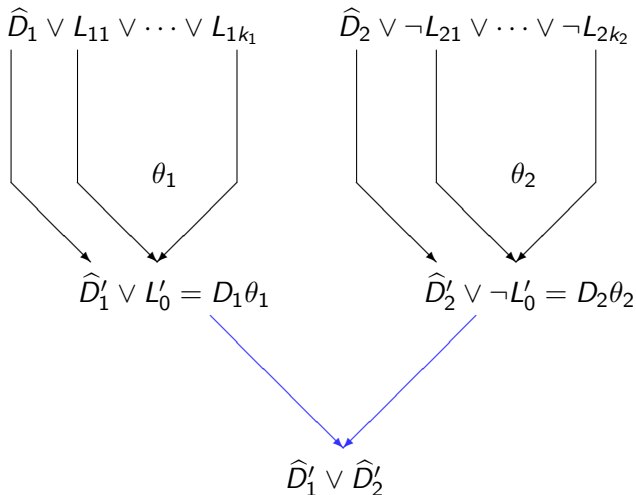
Значит,

$$D_1 = \widehat{D}_1 \vee L_{11} \vee L_{12} \vee \dots \vee L_{1k_1}$$

$$D_2 = \widehat{D}_2 \vee \neg L_{21} \vee \neg L_{22} \vee \dots \vee \neg L_{2k_2}$$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Так как $L'_0 = L_{11}\theta = L_{12}\theta_1 = \dots = L_{1k_1}\theta_1$, литеры $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ η_1 , т. е.

$$\eta_1 \in \text{НОУ}(L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}), \quad \theta_1 = \eta_1\rho_1.$$

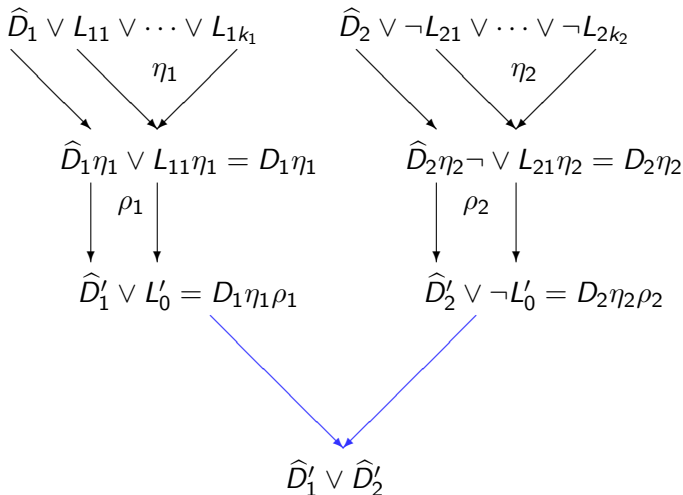
Значит $D_1\eta_1$ — склейка дизъюнкта D_1 по литерам $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{1k_1}$, и при этом $D'_1 = D_1\theta_1 = (D_1\eta_1)\rho_1$ — основной пример склейки $D_1\eta_2$.

Аналогично, литеры $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \dots, \neg L_{2k_2}$ имеют НОУ η_2 .

Тогда $D_2\eta_2$ — склейка дизъюнкта D_2 по литерам $\neg L_{21}, \neg L_{22}, \dots, \neg L_{2k_2}$, и при этом $D'_2 = D_2\theta_2 = (D_1\eta_2)\rho_2$ — основной пример склейки $D_2\eta_2$.

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Согласно нашей привычке переименовывать переменные, дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1$ и $D_2\eta_2$ содержат разные наборы переменных. Поэтому $Dom_{\rho_1} \cap Dom_{\rho_2} = \emptyset$, и существует подстановка $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$:

$$(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{11}\eta_1)\rho_1, \quad (L_{21}\eta_2)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho_2$$

Так как $L'_0 = L_{11}\eta_1\rho_1$ и $\neg L'_0 = \neg L_{21}\eta_2\rho_2$, верно

$(L_{11}\eta_1)\rho = (L_{21}\eta_2)\rho$, т. е. литеры $L_{11}\eta_1$ и $L_{21}\eta_2$ унифицируемы. Значит, они имеют НОУ λ , т. е.

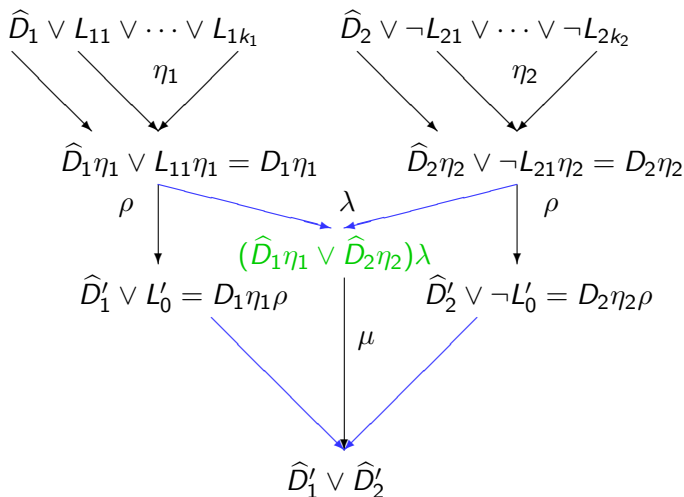
$$\lambda \in \text{НОУ}(L_{11}\eta_1, L_{21}\eta_2), \quad \rho = \lambda\mu.$$

Поэтому дизъюнкты-склейки $D_1\eta_1 = \hat{D}_1\eta_1 \vee L_{11}\eta_1$ и $D_2\eta_2 = \hat{D}_2\eta_2 \vee \neg L_{21}\eta_2$ имеют резольвенту $D_0 = (\hat{D}_1\eta_1 \vee \hat{D}_2\eta_2)\lambda$, и при этом

$$D'_0 = \hat{D}'_1 \vee \hat{D}'_2 = \hat{D}_1\eta_1\rho \vee \hat{D}_2\eta_2\rho = (\hat{D}_1\eta_1 \vee \hat{D}_2\eta_2)\lambda\mu = D_0\mu.$$

ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВООДА

Доказательство леммы о подъеме



ПОЛНОТА РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Доказательство леммы о подъеме

Таким образом, из дизъюнктов D_1 и D_2 резольютивно выводим дизъюнкт D_0 , основным примером которого являются D'_0 .

Что и требовалось доказать в лемме о подъеме. □

Завершение доказательства теоремы полноты.

Мы показали, что

1. Противоречивая система дизъюнктов S имеет конечную противоречивую систему S' **основных** примеров (теорема Эрбрана).
2. Из противоречивой системы основных примеров дизъюнктов S' можно резольютивно вывести пустой дизъюнкт $\square$ (лемма об основных примерах).
3. Если $\square$ резольютивно выводим из системы основных примеров дизъюнктов S' , то $\square$ резольютивно выводим из исходной системы дизъюнктов S (лемма о подъеме). □

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Метод резолюций

- ▶ корректен,
- ▶ полон,
- ▶ алгоритмизуем.

Но как пользоваться им для решения
практических задач?

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Вот подходящая логическая задача

Известно, что

- ▶ Даша любит Сашу,
- ▶ а Саша любит пиво,
- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша.

Вопрос: кто любит Дашу?

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Вначале сформулируем задачу на языке логики предикатов.

Сформируем алфавит, состоящий из:

- ▶ Константы *Даша* ,
- ▶ Константы *Саша* ,
- ▶ Константы *Паша* ,
- ▶ Константы *пиво* ,
- ▶ Предикатного символа $L^{(2)}$: « $L(x, y)$ — x любит y ».

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Далее запишем условия задачи на языке логики предикатов.

- ▶ Даша любит Сашу: $\varphi_1 : L(\text{Даша}, \text{Саша}),$
- ▶ а Саша любит пиво: $\varphi_2 : L(\text{Саша}, \text{пиво}),$
- ▶ а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то, что любит Паша: $\varphi_3 \ \& \ \varphi_4,$
 $\varphi_3 : L(\text{Паша}, \text{пиво})$
 $\varphi_4 : \forall x (\exists y (L(\text{Паша}, y) \ \& \ L(x, y)) \rightarrow L(\text{Паша}, x)).$

Кто любит Дашу? : $\varphi_0 : \exists z L(z, \text{Даша}).$

Формулировка задачи.

Проверить, верно ли, что $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0.$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

1. Сводим проблему логического следования

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0$$

к проблеме общезначимости

$$\models \varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \varphi_4 \rightarrow \varphi_0.$$

2. Сводим проблему общезначимости к проблеме противоречивости

$$\psi_1 = \neg (\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3 \& \varphi_4 \rightarrow \varphi_0)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

3. Строим предваренную нормальную форму ПНФ

$$\psi_2 = \forall x \forall y \forall z \left(L(\text{Саша}, \text{пиво}) \& \right. \\ L(\text{Саша}, \text{пиво}) \& \\ L(\text{Паша}, \text{пиво}) \& \\ (\neg L(\text{Паша}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\text{Паша}, x)) \& \\ \left. \neg L(z, \text{Даша}) \right).$$

4. Строим сколемовскую стандартную форму — она совпадает с ПНФ.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

5. Строим систему дизъюнктов S

$$\begin{aligned} S = \{ & D_1 = L(\text{Саша}, \text{пиво}), \\ & D_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво}), \\ & D_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво}), \\ & D_4 = \neg L(\text{Паша}, y) \vee \neg L(x, y) \vee L(\text{Паша}, x), \\ & D_0 = \neg L(z, \text{Даша}) \}. \end{aligned}$$

6. А теперь будем строить резольютивный вывод.

Будем руководствоваться такой стратегией:

- ▶ Начнем с дизъюнкта-запроса D_0 ;
- ▶ На каждом шаге вывода будем использовать последнюю из построенных резольвент (линейный вывод).

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша})$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$$

$$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$$

$$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1) \quad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$$

$$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$$

$$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1) \quad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

$$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$$

$$D'_2 = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша})$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$$

$$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$$

$$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1) \quad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

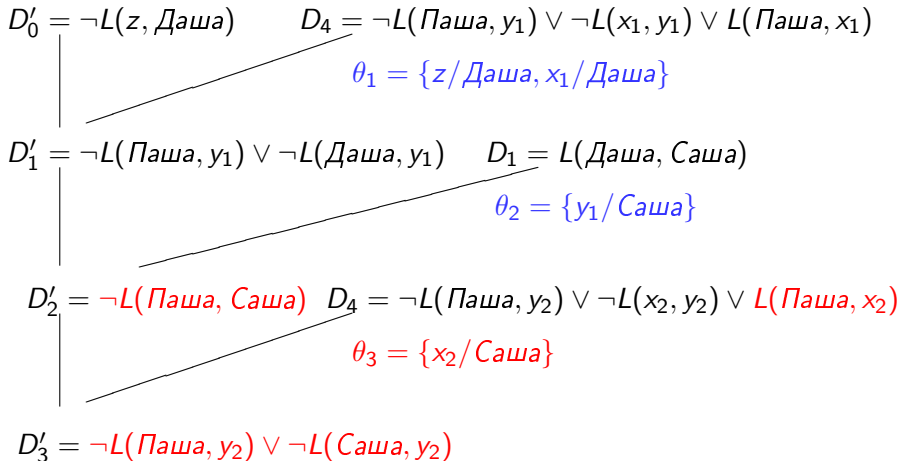
$$\theta_2 = \{y_1 / \text{Cашa}\}$$

$$D_2' = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\text{Паша}, x_2)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_0 = \neg L(z, \text{Даша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(x_1, y_1) \vee L(\text{Паша}, x_1)$$

$$\theta_1 = \{z/\text{Даша}, x_1/\text{Даша}\}$$

$$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, y_1) \vee \neg L(\text{Даша}, y_1) \quad D_1 = L(\text{Даша}, \text{Саша})$$

$$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$$

$$D'_2 = \neg L(\text{Паша}, \text{Саша}) \quad D_4 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(x_2, y_2) \vee L(\text{Паша}, x_2)$$

$$\theta_3 = \{x_2/\text{Саша}\}$$

$$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резольютивный вывод

$$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2) \quad D_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2) \quad D_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

$$\theta_4 = \{y_2/\text{пиво}\}$$

$$D'_4 = \neg L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2) \quad D_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

$$\theta_4 = \{y_2/\text{пиво}\}$$

$$D'_4 = \neg L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

$$D_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод

$$D'_3 = \neg L(\text{Паша}, y_2) \vee \neg L(\text{Саша}, y_2) \quad D_2 = L(\text{Саша}, \text{пиво})$$

$$\theta_4 = \{y_2/\text{пиво}\}$$

$$D'_4 = \neg L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

$$D_3 = L(\text{Паша}, \text{пиво})$$

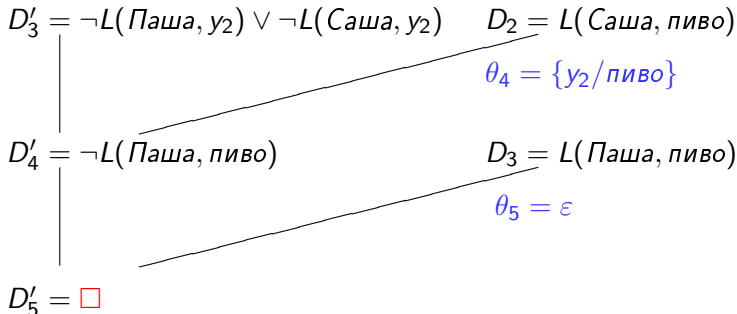
$$\theta_2 = \varepsilon$$

$$D'_5 = \square$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

6. Линейный резолютивный вывод



**Успешный резолютивный
вывод завершен!**

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Итак, система дизъюнктов S противоречива.

Значит,

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0.$$

В рамках нашей задачи это означает, что верно утверждение:
«Кто-то любит Дашу».

Но кто же это таинственное существо, любящее Дашу?

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

Решение задачи.

Чтобы ответить и на этот вопрос, возьмем все подстановки-унификаторы, которые мы вычислили по ходу вывода, и посмотрим, какое действие они окажут на **целевую переменную** z в дизъюнкте-запросе

$$D_0 = \neg L(z, \text{Даша}).$$

$$\theta_1 = \{z/\text{Паша}, x_1/\text{Даша}\},$$

$$\theta_2 = \{y_1/\text{Саша}\}$$

$$\theta_3 = \{x_2/\text{Саша}\}$$

$$\theta_4 = \{y_2/\text{пиво}\}$$

$$\theta_5 = \varepsilon$$

$$z\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5 = \text{Паша}$$

Итак, **Паша любит Дашу!**

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 10.

Основы математической логики и логического программирования

ЛЕКТОР: В.А. Захаров

Лекция 11.

Стратегии резолютивного вывода.
Резолютивный вывод как
средство вычисления.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Метод резолюций не предписывает заранее никакого фиксированного порядка применения правил резолюции и склейки для вывода пустого дизъюнкта $\square$ из противоречивого множества дизъюнктов.

Существуют различные **стратегии резолютивного вывода**, налагающие дополнительные ограничения на выбор подходящих пар дизъюнктов для получения резольвент.

Стратегия резолютивного вывода называется **полной**, если она позволяет вывести пустой дизъюнкт $\square$ из любого противоречивого множества дизъюнктов.

Рассмотрим пример.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Пример.

Пусть

$$S = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R; \\ D_2 = P \vee R; \\ D_3 = Q \vee R; \\ D_4 = \neg R \end{array} \right\}$$

Можно построить много разных резольвент:

$D_1 + D_2 = \neg Q \vee R$, $D_1 + D_3 = \neg P \vee R$, $D_1 + D_4 = \neg P \vee \neg Q$,
 $D_2 + D_4 = P$, $D_3 + D_4 = Q$, и т. д.

Но как ограничиться только теми, которые действительно нужны для вывода $\square$?

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Семантическая резолюция

Разделим дизъюнкты на два подмножества по следующему принципу:

выберем H -интерпретацию I и положим

$$S_1^I = \{D : D \in S, I \models D\},$$

$$S_2^I = \{D : D \in S, I \not\models D\}.$$

Наложим ограничение на применение правила резолюции:

При построении резольвенты, оба дизъюнкта-предпосылки должны принадлежать разным множествам S_1^I и S_2^I .

$$\frac{D_1 = D'_1 \vee L_1, D_2 = D'_2 \vee \neg L_2}{D_0 = (D'_1 \vee D'_2)\theta}, D_1 \in S_1^I, D_2 \in S_2^I, \theta \in \text{НОУ}(L_1, L_2).$$

Такое правило будем называть **правилом I -резолюцией**.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Пример.

Пусть $I = \emptyset$, т. е. $I \not\models P$, $I \not\models Q$, $I \not\models R$. Тогда

$$\begin{array}{ll} S_1^I : & D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R; \\ & D_4 = \neg R; \end{array} \quad \begin{array}{ll} S_2^I : & D_2 = P \vee R; \\ & D_3 = Q \vee R; \end{array}$$

I -резольвенты будут строиться так:

$$\begin{array}{ll} S_1 : & D_1 + D_2 = \neg Q \vee R; \\ & D_1 + D_3 = \neg P \vee R; \end{array} \quad \begin{array}{ll} S_2 : & D_4 + D_2 = P; \\ & D_4 + D_3 = Q; \\ & (D_1 + D_2) + D_3 = R; \\ & ((D_1 + D_2) + D_3) + D_4 = \square \end{array}$$

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Теорема полноты $/$ -резолюции

Если система дизъюнктов S противоречива, то для любой интерпретации I существует успешный $/$ -резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S .

Доказательство:

Самостоятельно.

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Входная резолюция

Предположим, что в системе дизъюнктов S выделен некоторый дизъюнкт D_0 .

Тогда резолютивный вывод пустого дизъюнкта $\square$ из системы дизъюнктов S можно строить, руководствуясь следующими соглашениями:

- ▶ Для построения первой резольвенты D_1 выбирается дизъюнкт D_0 и некоторый дизъюнкт $D \in S \setminus \{D_0\}$;
- ▶ Для построения i -ой резольвенты D_i выбирается резольвента D_{i-1} , построенная на предыдущем шаге вывода, и дизъюнкт $D \in S$.

Резолютивный вывод такого вида будем называть **входным резолютивным выводом**, инициированным дизъюнктом D_0 .

СТРАТЕГИИ РЕЗОЛЮТИВНОГО ВЫВОДА

Пример.

Пусть

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} D_1 = \neg P \vee \neg Q \vee R; & D_2 = P \vee R; \\ D_3 = Q \vee R; & D_4 = \neg R \end{array} \right\}$$

и выделенный дизъюнкт D_0 — это $D_4 = \neg R$.

Тогда входной резольютивный вывод будет таким:

1. $D_4 + D_1 = \neg P \vee \neg Q$;
2. $(D_4 + D_1) + D_2 = R \vee \neg Q$;
3. $((D_4 + D_1) + D_2) + D_3 = R$;
4. $((((D_4 + D_1) + D_2) + D_3) + D_4 = \square$.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Метод резолюций можно использовать для решения разных задач. Например, для получения ответа на вопрос

А будет ли утверждение φ_0 обязательно верно, если известно, что верны утверждения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$?

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — это база знаний , φ_0 — это запрос .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Математическая постановка задачи такова: проверить $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \varphi_0$.

Проверка логического следствия сводится к проверке общезначимости: $\models (\varphi_1 \& \varphi_2 \& \dots \& \varphi_n) \rightarrow \varphi_0$.

Проверка общезначимости сводится к проверке противоречивости формулы $\neg((\varphi_1 \& \varphi_2 \& \dots \& \varphi_n) \rightarrow \varphi_0)$, или, что равносильно, противоречивости системы формул $S = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\varphi_0\}$.

Для проверки противоречивости системы S применяем метод резолюций.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Но метод резолюций позволяет решать и более изощренные задачи.

Пусть имеется база знаний $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ и запрос $Q = \varphi_0(x_1, \dots, x_m)$.

Задача: **вычислить значения переменных $x_1, \dots, x_m$, при которых запрос Q логически следует из базы знаний Γ .**

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Решить эту задачу можно попытаться так:

задачу проверки логического следствия

$$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \exists x_1 \dots \exists x_m \varphi_0(x_1, \dots, x_m).$$

свести к проверке противоречивости системы формул

$$S = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg \varphi_0(x_1, \dots, x_m)\}$$

(здесь $x_1, \dots, x_m$ по умолчанию связаны квантором $\forall$),

построить резольютивное опровержение S , и

применить последовательность унификаторов

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, вычисленных по ходу построения

резольютивного вывода, к **целевым переменным** $x_1, \dots, x_m$:

$$x_1\theta_1\theta_2 \dots \theta_N, \quad \dots, \quad x_m\theta_1\theta_2 \dots \theta_N.$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Этот трюк сработал при решении задачи о «любовном квадрате Саша–Даша–Паша–пиво».

Попробуем применить его еще раз для решения какой-нибудь другой вычислительной задачи.

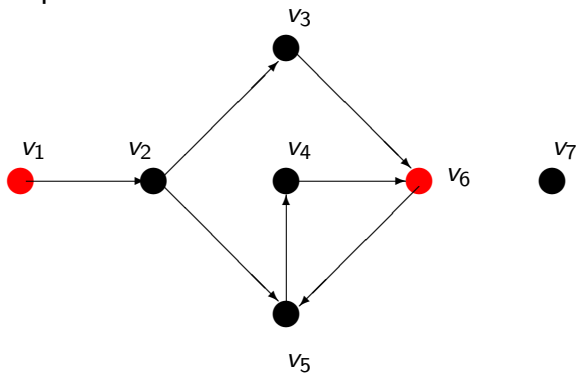
Поиск пути в графе.

Пусть задан ориентированный граф Γ , в котором выделены две вершины u и v . Требуется найти маршрут из вершины u в вершину v .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

граф Γ



РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Вначале нужно суметь сформулировать эту задачу на языке логики предикатов.

Граф Γ может быть задан перечнем его вершин и дуг. Введем

- ▶ константы $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$ для обозначения вершин графов;
- ▶ предикатный символ $Vert^{(1)}$ для обозначения свойства: « x — вершина графа» ;
- ▶ предикатный символ $Arc^{(2)}$ для обозначения свойства: « $\langle x, y \rangle$ — дуга графа».

Чтобы отличать переменные от констант, в дальнейшем условимся обозначать переменные **ЗАГЛАВНЫМИ БУКВАМИ**, а константы — **прописными буквами**.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Тогда граф может быть описан следующим набором формул логики предикатов.

$$KB_{\Gamma} = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 = Vert(v_1), & \psi_1 = Arc(v_1, v_2), \\ \varphi_2 = Vert(v_2), & \psi_2 = Arc(v_2, v_3), \\ \varphi_3 = Vert(v_3), & \psi_3 = Arc(v_2, v_5), \\ \varphi_4 = Vert(v_4), & \psi_4 = Arc(v_3, v_6), \\ \varphi_5 = Vert(v_5), & \psi_5 = Arc(v_5, v_4), \\ \varphi_6 = Vert(v_6), & \psi_6 = Arc(v_4, v_6), \\ \varphi_7 = Vert(v_7), & \psi_7 = Arc(v_6, v_5), \end{array} \right\}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Ориентированный путь в графе — это последовательность (список) дуг. Значит нужно иметь подходящую структуру данных для представления списка на языке логики предикатов.

Для этого мы введем

- ▶ специальную константу **nil** для обозначения **пустого списка**, не содержащего ни одного элемента;
- ▶ специальный функциональный символ $\cdot^{(2)}$ для обозначения двухместной операции присоединения элемента x к списку y в качестве заголовка (**конструктор списков**).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

При помощи введенных символов **nil** и **▪** определим специальное множество термов — **СПИСКИ** :

- ▶ константа **nil** — это список;
- ▶ если t — произвольный терм, а T — список, то терм $▪(t, T)$ — это список;
- ▶ других списков нет.

Терм t называется **заголовком**, а T — **хвостом** списка $▪(t, T)$.

Чтобы сделать обозначения более естественными, мы будем записывать знак двухместной операции **▪** между аргументами (инфиксная запись), как это делается для операций $+$, $\times$.

Таким образом, запись $▪(t_1, t_2)$ равносильна записи $t_1 \text{ } ▪ \text{ } t_2$.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Примеры списков

Пустой список: **nil**

Список из одного элемента X : $X \cdot \mathbf{nil}$

Упорядоченная пара $\langle X, Y \rangle$: $X \cdot (Y \cdot \mathbf{nil})$

Последовательность букв а, б, в, г: $a \cdot (b \cdot (v \cdot (r \cdot \mathbf{nil})))$

Таблица (матрица) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$(1 \cdot (2 \cdot \mathbf{nil})) \cdot ((3 \cdot (4 \cdot \mathbf{nil})) \cdot \mathbf{nil}))$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Поскольку в большинстве случаев списки используются для представления конечных последовательностей, упростим запись линейных списков:

условимся опускать скобки, считая по умолчанию, что все скобки ассоциируются вправо, т. е. запись

$$a \cdot (b \cdot (c \cdot (d \cdot \text{nil})))$$

будет считаться равносильной записи

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \text{nil}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Еще несколько примеров списков

Терм **$\text{nil} . \text{nil}$** обозначает список, состоящий из одного элемента — пустого списка;

Терм $a . b . v . g$ вообще не является списком (**почему?**);

Терм $(1 . \text{nil}) . 2 . \text{nil} . \text{nil}$ обозначает список, состоящий из трех элементов:

первый элемент — это список, состоящий из одного элемента 1,

второй элемент — это константа 2,

третий элемент — пустой список.

Следует помнить, что термы $X . \text{nil}$ и X — существенно различные (имеют разные типы):

$X . \text{nil}$ — это список (массив) из одного элемента X ,

X — это просто элемент (переменная или константа).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Таким образом, маршрут в ориентированном графе — это список дуг, в котором каждая дуга — это список, состоящий из двух вершин.

Пример: $(v_1 \cdot v_2 \cdot \text{nil}) \cdot (v_2 \cdot v_3 \cdot \text{nil}) \cdot \text{nil}$ — это маршрут, состоящий из двух дуг $\langle v_1, v_2 \rangle$ и $\langle v_2, v_3 \rangle$.

А теперь запишем на языке логики предикатов определение маршрута в ориентированном графе. Для этого введем трехместный предикатный символ $R^{(3)}$:

$R(X, Y, t)$ будет обозначать утверждение о том, что терм t задает маршрут из вершины X в вершину Y .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Определение маршрута в графе состоит из двух частей:

$$\chi_1 = \forall X \ R(X, X, \mathbf{nil})$$

«из X в X ведет пустой маршрут»;

$$\chi_2 = \forall X \forall Y \forall Z \forall U \ (Arc(X, Y) \& R(Y, Z, U) \rightarrow R(X, Z, (X \cdot Y \cdot \mathbf{nil}) \cdot U))$$

«если из X в Y ведет дуга, а из Y в Z ведет маршрут U ,
то из X в Z ведет маршрут $t' = \langle X, Y \rangle, U$ ».

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Итак, мы имеем

Базу знаний KB , состоящую из формул

$$\varphi_i, 1 \leq i \leq 7, \quad \psi_i, 1 \leq i \leq 7, \quad \chi_1, \chi_2,$$

при помощи которых определяется устройство графа Γ и знания о том, что такое маршрут в графе.

Запрос к базе знаний $Q(X) = R(v_1, v_6, X)$ с одной целевой переменной X .

Наша задача: найти такое значение t целевой переменной X , при котором имеет место логическое следствие

$$KB \models Q(t).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Будем решать задачу поиска пути методом резолюций.

$$KB \models \exists X Q(X)$$

Сведем вопрос о логическом следствии к вопросу о противоречивости формулы

$$\neg \left(\left(\bigwedge_{i=1}^7 \varphi_i \ \& \ \bigwedge_{j=1}^7 \psi_j \ \& \ \chi_1 \ \& \ \chi_2 \right) \rightarrow \exists X Q(X) \right)$$

Далее приводим полученную формулу к ПНФ, к ССФ, и извлекаем систему дизъюнктов S .

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Построим резольтивное опровержение полученной системы дизъюнктов S :

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 = \text{Vert}(v_1), & \psi_1 = \text{Arc}(v_1, v_2), \\ \varphi_2 = \text{Vert}(v_2), & \psi_2 = \text{Arc}(v_2, v_3), \\ \varphi_3 = \text{Vert}(v_3), & \psi_3 = \text{Arc}(v_2, v_5), \\ \varphi_4 = \text{Vert}(v_4), & \psi_4 = \text{Arc}(v_3, v_6), \\ \varphi_5 = \text{Vert}(v_5), & \psi_5 = \text{Arc}(v_5, v_4), \\ \varphi_6 = \text{Vert}(v_6), & \psi_6 = \text{Arc}(v_4, v_6), \\ \varphi_7 = \text{Vert}(v_7), & \psi_7 = \text{Arc}(v_6, v_5), \\ \chi_1 = R(X, X, \mathbf{nil}), & \\ \chi_2 = \neg \text{Arc}(X, Y) \vee \neg R(Y, Z, U) \vee R(X, Z, (X.Y.\mathbf{nil}).U), & \\ \Phi_0 = \neg R(v_1, v_6, \mathbf{X}) \end{array} \right\}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

$$\chi_2 = \neg \text{Arc}(X_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, Z_1, U_1) \vee R(X_1, Z_1, (X_1 \cdot Y_1 \cdot \text{nil}) \cdot U_1)$$

$$\Phi_0 = \neg R(v_1, v_6, X)$$

$$\theta_1 = \{X / (v_1 \cdot Y_1 \cdot \text{nil}) \cdot U_1, X_1 / v_1, Z_1 / v_6\}$$

$$D'_1 = \neg \text{Arc}(v_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, v_6, U_1)$$

$$\psi_1 = \text{Arc}(v_1, v_2)$$

$$\theta_2 = \{Y_1 / v_2\}$$

$$\neg \text{Arc}(X_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, Z_2, U_2) \vee R(X_2, Z_2, (X_2 \cdot Y_2 \cdot \text{nil}) \cdot U_2)$$

$$D'_2 = \neg R(v_2, v_6, U_1)$$

$$\theta_3 = \{U_1 / (v_2 \cdot Y_2 \cdot \text{nil}) \cdot U_2, X_2 / v_2, Z_2 / v_6\}$$

$$D'_3 = \neg \text{Arc}(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2)$$

$$D'_3 = \neg \text{Arc}(v_2, Y_2) \vee \neg R(Y_2, v_6, U_2) \quad \psi_2 = \text{Arc}(v_2, v_3)$$

$$\theta_4 = \{Y_2/v_3\}$$

$$\neg \text{Arc}(X_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, Z_3, U_3) \vee R(X_3, Z_3, (X_3 \cdot Y_3 \cdot \text{nil}) \cdot U_3)$$

$$D'_4 = \neg R(v_3, v_6, U_2)$$

$$\theta_5 = \{U_2/(v_3 \cdot Y_3 \cdot \text{nil}) \cdot U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\}$$

$$D'_5 = \neg \text{Arc}(v_3, Y_3) \vee \neg R(Y_3, v_6, U_3) \quad \psi_4 = \text{Arc}(v_3, v_6)$$

$$\theta_6 = \{Y_3/v_6\}$$

$$D'_6 = \neg R(v_6, v_6, U_3) \quad \chi_1 = R(X_4, X_4, \text{nil})$$

$$\theta_7 = \{X_4/v_6, U_3/\text{nil}\}$$

$$D'_7 = \square$$

Вывод успешно завершен.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

Итак, система дизъюнктов S противоречива, т.е. маршрут из вершины v_1 в вершину v_6 существует. Но каков этот маршрут?

Рассмотрим последовательность вычисленных унификаторов

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \{X/(v_1.Y_1.nil).U_1, X_1/v_1, Z_1/v_6\} \\ \theta_2 &= \{Y_1/v_2\} \\ \theta_3 &= \{U_1/(v_2.Y_2.nil).U_2, X_2/v_2, Z_2/v_6\} \\ \theta_4 &= \{Y_2/v_3\} \\ \theta_5 &= \{U_2/(v_3.Y_3.nil).U_3, X_3/v_3, Z_3/v_6\} \\ \theta_6 &= \{Y_3/v_6\} \\ \theta_7 &= \{X_4/v_6, U_3/nil\}\end{aligned}$$

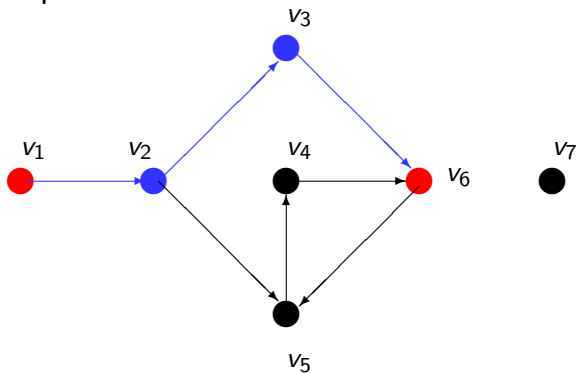
и применим их к целевой переменной X :

$$X\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7 = (v_1.Y_1.nil).(v_2.Y_2.nil).(v_3.Y_3.nil).nil$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Поиск пути в графе.

граф Γ



$$X_{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \theta_7} = (v_1 \cdot v_2 \cdot \text{nil}) \cdot (v_2 \cdot v_3 \cdot \text{nil}) \cdot (v_3 \cdot v_6 \cdot \text{nil}) \cdot \text{nil}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Нам опять повезло, и метод резолюций вычислил правильный ответ.

Неужели так хорошо и красиво бывает всегда?

Рассмотрим еще одну задачу.

Где мы проведем вечер?

Если вечером будет идти дождь, то мы пойдем в кино, а если дождя не будет, то мы пойдем в парк. Где же мы проведем вечер?

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

Введем необходимые константы и предикаты:

- ▶ *кино* и *парк* — константы;
- ▶ $R^{(0)}$ — 0-местный предикатный символ, обозначающий утверждение «вечером пойдет дождь»;
- ▶ $E^{(1)}$ — 1-местный предикатный символ; $E(X)$ обозначает утверждение «этим вечером наше развлечение — X ».

База знаний:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= R \rightarrow E(\text{кино}), \\ \varphi_2 &= \neg R \rightarrow E(\text{парк}),\end{aligned}$$

Запрос: $Q(X) = E(X)$.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

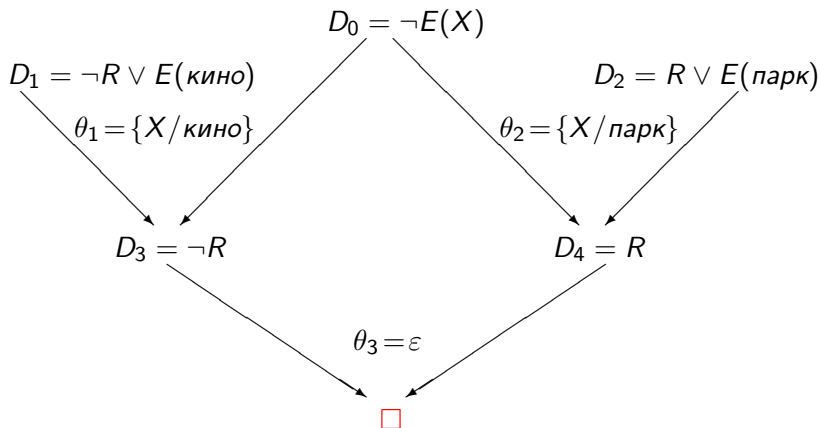
Где мы проведем вечер?

1. $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \exists X E(X)$?
2. $\models \varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \exists X E(X)$?
3. Противоречива ли $\neg(\varphi_1 \& \varphi_2 \rightarrow \exists X E(X))$?
3. Противоречива ли система

$$S = \left\{ \begin{array}{l} D_1 = \neg R \vee E(\text{кино}), \\ D_2 = R \vee E(\text{парк}), \\ D_0 = \neg E(X) \end{array} \right\}$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?



Резолютивное опровержение построено

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Где мы проведем вечер?

Построив резолютивное опровержение, мы можем быть уверены, что

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \exists X E(X),$$

т.е. **куда-то** вечером мы пойдем.

Но куда же мы пойдем?

Поскольку в этом выводе вместо целевой переменной X были одновременно (параллельно) подставлены разные термы *кино* и *парк*, то все, что мы можем сказать — это $X \in \{\text{кино}, \text{парк}\}$.

Мы сумели доказать существование требуемого предмета X , но не сумели вычислить его конкретное значение. Такие доказательства называются **неконструктивными**.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Чтобы резолютивный вывод позволял проводить вычисления, он должен быть **конструктивным**.

Но, как показывает пример «вечернего развлечения», не все противоречивые системы дизъюнктов допускают **конструктивное** резолютивное опровержение. Значит, для вычислительных целей нужно выбрать такой подкласс формул логики предикатов, для которых резолютивное опровержение оказывается конструктивным.

Заметим, что при решении задач «любовного квадрата» и «маршрута в графе» мы построили **входное** резолютивное опровержение, инициированное формулой-запросом, а при решении задачи «вечернего развлечения» такое опровержение построить в принципе невозможно.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Значит, для того, чтобы использовать метод резолюций как средство вычислений, нужно ограничиться входным резолютивным выводом. Удалось обнаружить широкий класс формул, для которых резолютивное опровержение всегда имеет линейную структуру. Это — **хорновские дизъюнкты** .

Определение

Литера L называется **положительной** , если L — это атом.

Литера L называется **отрицательной** , если $L = \neg A$, где A — это атом.

Дизъюнкт $D = L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$ называется **хорновским дизъюнктом (horn clause)** , если среди литер $L_1, L_2, \dots, L_n$ имеется не более одной **положительной** литеры.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Примеры.

Хорновские дизъюнкты:

$$D'_1 = \neg L(\text{Паша}, Y) \vee \neg L(X, Y) \vee L(\text{Паша}, X),$$

$$D'_2 = \neg \text{Arc}(v_1, Y_1) \vee \neg R(Y_1, v_6, U_1),$$

$$D'_3 = \text{Arc}(v_6, v_4),$$

$$D'_4 = \neg R \vee E(\text{кино}).$$

А вот этот дизъюнкт — нехорновский:

$$D'' = R \vee E(\text{парк}).$$

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Хорновский дизъюнкт

$$A_0 \vee \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \dots \vee \neg A_n$$

равносилен формуле

$$(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow A_0,$$

которая выражает утверждение:

«Если выполнены условия A_1 и A_2 и ... и A_n , то верно A_0 ».

В подавляющем большинстве случаев именно в такой форме мы выражаем наши позитивные знания (условные и безусловные).

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Хорновский дизъюнкт

$$\neg C_1 \vee \neg C_2 \vee \dots \vee \neg C_m$$

равносилен формуле

$$\neg(C_1 \& C_2 \& \dots \& C_m),$$

и это есть отрицание запроса $Q(X_1, \dots, X_k) = C_1 \& C_2 \& \dots \& C_m$, который выражает требование:

«Найти такие значения переменных $X_1, \dots, X_k$, которые удовлетворяют условиям C_1 и C_2 и $\dots$ и C_m ».

Большинство наших вопросов представлено именно в такой форме.

РЕЗОЛЮТИВНЫЙ ВЫВОД КАК СРЕДСТВО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Резолютивное опровержение систем хорновских дизъюнктов — это вычисление ответов на простые запросы, обращенные к базе позитивных знаний.

Базы позитивных знаний (хорновские дизъюнкты) становятся, таким образом,

ЛОГИЧЕСКИМИ ПРОГРАММАМИ .

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 11.